EXERCICE 4 **5 points**

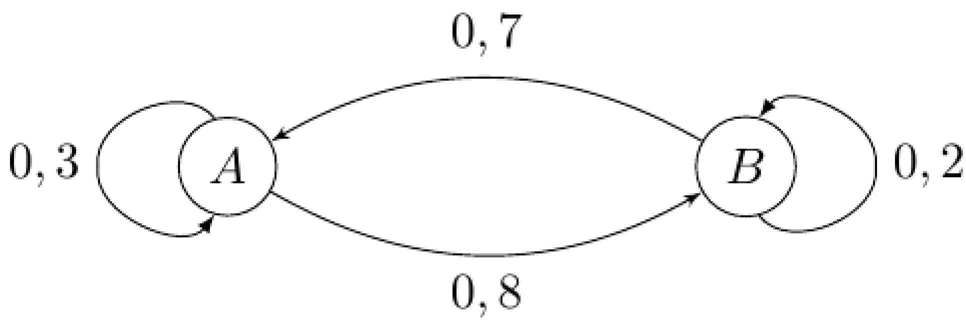
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

• On considère le système $\begin{cases} n \equiv 1\ [5] \\ n \equiv 3[4] \end{cases}$ d'inconnue n entier relatif.

Affirmation 1 : Si n est solution de ce système alors $n - 11$ est divisible par 4 et par 5.
Affirmation 2 : Pour tout entier relatif k, l'entier $11 + 20k$ est solution du système.
Affirmation 3 : Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 20k$.

• Un automate peut se trouver dans deux états A ou B. À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous. Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état B.



On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a et b sont des réels
Initialisation :	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 1
Traitement :	Pour k allant de 1 à 10
	a prend la valeur $0{,}8a + 0{,}3b$
	b prend la valeur $1 - a$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher a
	Afficher b

Affirmation 4 : En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10}.
Affirmation 5 : Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.

CORRECTION

EXERCICE 4 **5 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

• On considère le système $\begin{cases} n \equiv 1\ [5] \\ n \equiv 3 [4] \end{cases}$ d'inconnue n entier relatif.

Affirmation 1 *: Si n est solution de ce système alors $\boldsymbol{n-11}$ est divisible par 4 et par 5.*

$$\begin{cases} n \equiv 1\ [5] \\ n \equiv 3[4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-11 \equiv 1-11\ [5] \\ n-11 \equiv 3-11[4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-11 \equiv -10\ [5] \\ n-11 \equiv -8[4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-11 \equiv 0\ [5] \\ n-11 \equiv 0[4] \end{cases}$$

$n-11 \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow 5$ divise $n-11$.
$n-11 \equiv 0\ [4] \Leftrightarrow 4$ divise $n-11$.

Conclusion : **L'affirmation 1 est vraie**.

Affirmation 2 *: Pour tout entier relatif k, l'entier $\boldsymbol{11+20k}$ est solution du système.*

$$\begin{aligned} 11+20k &\equiv 11+5\times 4k\ [5] \\ &\equiv 11\ [5] \\ &\equiv 1\ [5] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11+20k &\equiv 11+5\times 4k\ [4] \\ &\equiv 11\ [4] \\ &\equiv 3\ [4] \end{aligned}$$

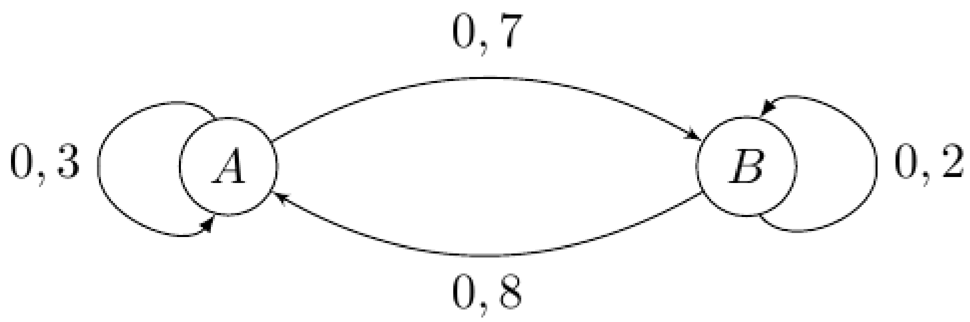
Conclusion : **L'affirmation 2 est vraie**.

Affirmation 3 *: Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $\boldsymbol{n = 11+20k}$.*

Dans l'affirmation 1 on a vu que 5 divise $n-11$ et 4 divise $n-11$, étant donné que 5 et 4 sont premiers entre eux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, 5×4 divise $n-11$.
Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n-11 = 20k \Leftrightarrow n = 11+20k$.
On vient de démontrer que n solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11+20k$.

Conclusion : **L'affirmation 3 est vraie**.

• Un automate peut se trouver dans deux états A ou B. À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous. Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état B.



On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a et b sont des réels
Initialisation :	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 1
Traitement :	Pour k allant de 1 à 10
	a prend la valeur $0{,}8a + 0{,}3b$
	b prend la valeur $1 - a$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher a
	Afficher b

Affirmation 4 ***: En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10}.***

La matrice associée à ce graphe est $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Ainsi le passage d'un état à l'autre est déterminé par la relation : $(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n)\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0{,}3a_n + 0{,}8b_n \quad 0{,}7a_n + 0{,}2b_n)$

Ainsi la ligne 2 du traitement pour l'algorithme devrait être : a prend la valeur $0{,}3a + 0{,}8b$
L'algorithme ne calcule donc pas les valeurs successives de a et b.

L'affirmation 4 est fausse.

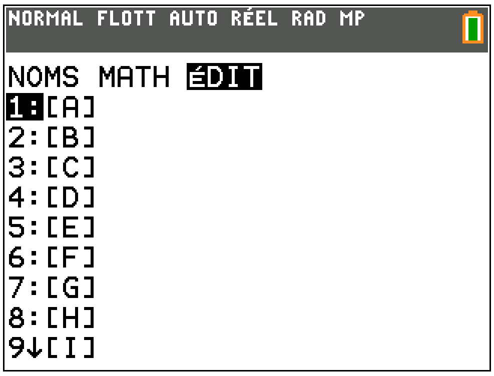
Affirmation 5 *: Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.*

On peut calculer a_4 et b_4 en utilisant la relation matricielle suivante : $(a_4 \quad b_4) = (a_0 \quad b_0)\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}^4$

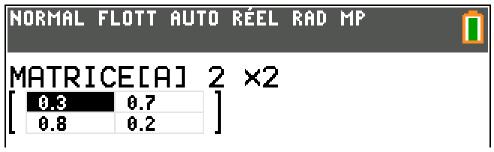
Donc $(a_4 \quad b_4) = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}^4$

Calculons cette puissance de matrice à l'aide de la calculatrice TI83 Premium CE :

Pour entrer une matrice, on appuie sur matrice puis on choisit l'onglet **Edit** puis entrer

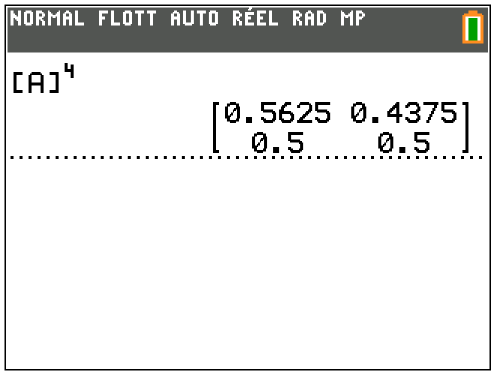


On entre la taille de la matrice : 2x2 puis ses coefficients :
On quitte l'éditeur de matrice en appuyant sur 2nde mode (quitter)



Puis pour calculer A^4 on appuie sur matrice puis on choisit $[A]$ et on appuie sur entrer.

Enfin on entre $[A]^4$ et la TI83 Premium CE calcule la matrice A^4.

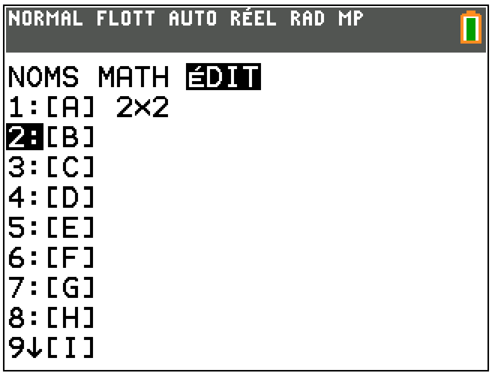


Ainsi $(a_4 \quad b_4) = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0{,}5625 & 0{,}4375 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (0{,}5 \quad 0{,}5)$

On pouvait aussi faire ce dernier calcul avec notre TI83 Premium CE :

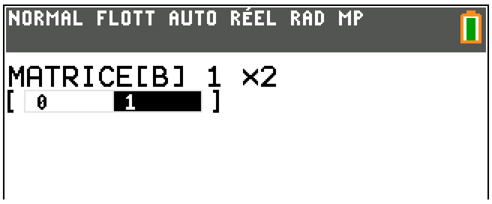
Pour entrer une matrice représentant les conditions initiales, on appuie sur

[x^{-1} B matrice] puis on choisit l'onglet **Edit** puis [précéd entrer]



On entre la taille de la matrice : 1x2 puis ses coefficients :
On quitte l'éditeur de matrice en appuyant sur

[2nde] [quitter mode]



Puis pour calculer $B \times A^4$ on appuie sur [x^{-1} B matrice]

puis on choisit $[B]$ puis [[R ×] puis [x^{-1} B matrice]
et on choisit A qu'on élève à la puissance 4, puis

on appuie sur [précéd entrer].
La TI83 Premium CE calcule $(a_4 \quad b_4)$

Conclusion : $a_4 = b_4 = 0{,}5$

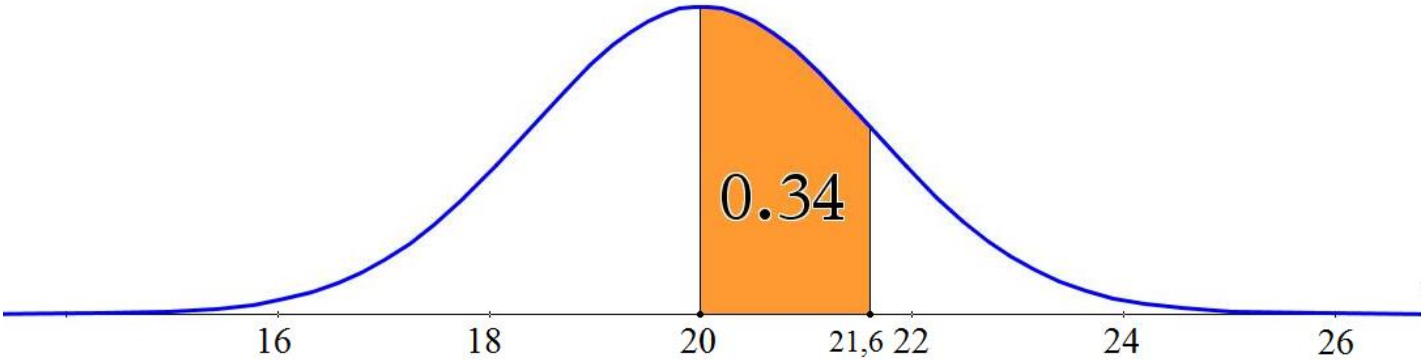
$\boxed{\text{L'affirmation 5 est vraie.}}$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

• Sur le schéma ci-dessous on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et 21,6 est égale à 0,34.



Affirmation 1 : La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23{,}2;+\infty[$ vaut environ 0,046.

• Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose :

$$Z = \frac{iz}{z-2}$$

Affirmation 2 : L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point $A(1; 0)$.

Affirmation 3 : Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4+6e^{-2x}}$$

Affirmation 4 : L'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5 : L'algorithme suivant affiche en sortie la valeur 0,54.

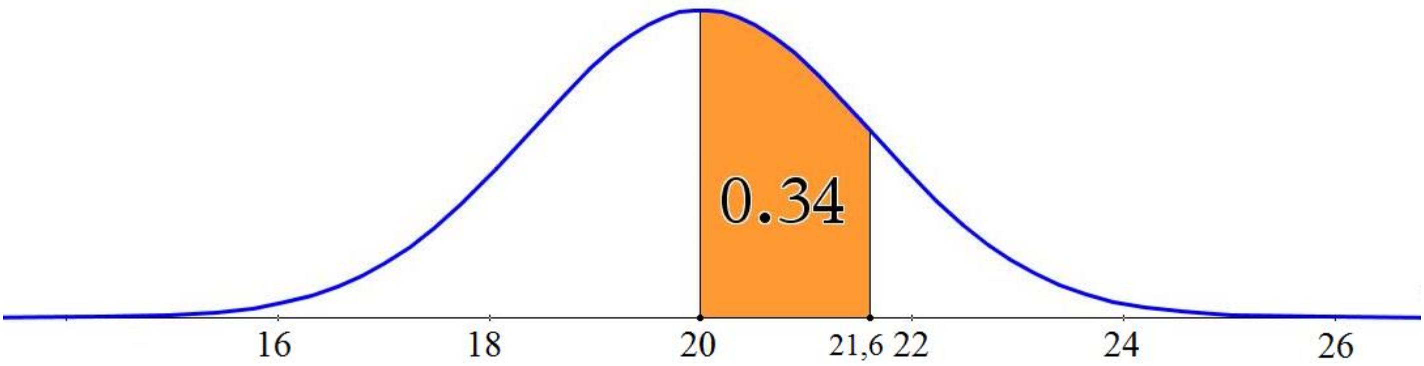
Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0
	Y prend la valeur $\frac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y < 0{,}5$
	X prend la valeur $X + 0{,}01$
	Y prend la valeur $\frac{3}{4+6e^{-2X}}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

CORRECTION

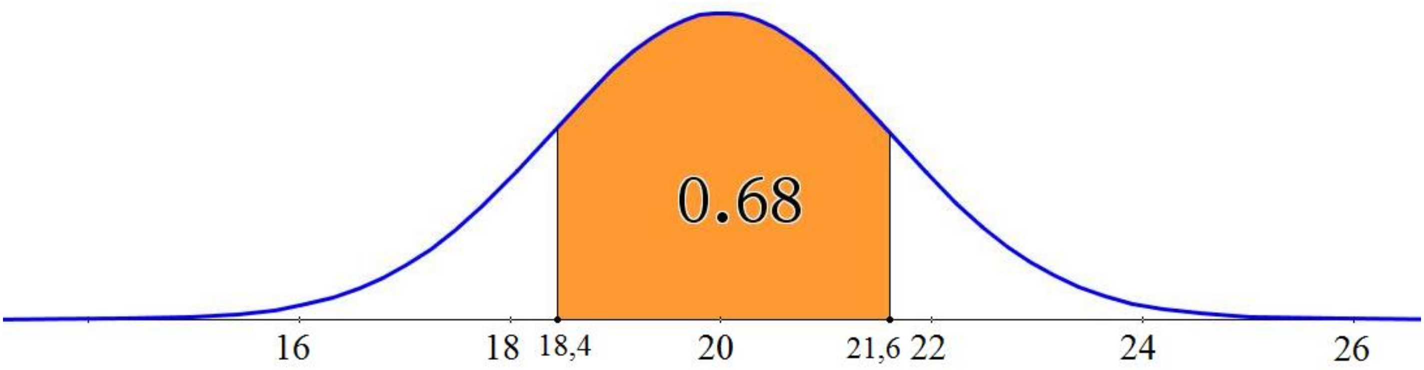
EXERCICE 4 **5 points**

Affirmation 1 ***: La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle [23,2;+∞[vaut environ 0,046.***

On nous donne



On en déduit par symétrie de la loi normale :



0,68 correspond, d'après le cours à $p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
Ce qui nous donne $\mu + \sigma = 21{,}6 \Leftrightarrow 20 + \sigma = 21{,}6$ soit $\sigma = 1{,}6$.

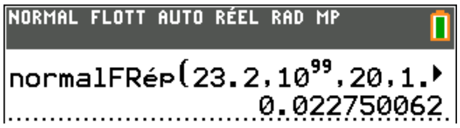
On peut maintenant soit continuer avec sa calculatrice :

On demande de calculer $p(X \geq 23{,}2)$. Sur notre TI-83 Premium CE, on appuie sur sur 

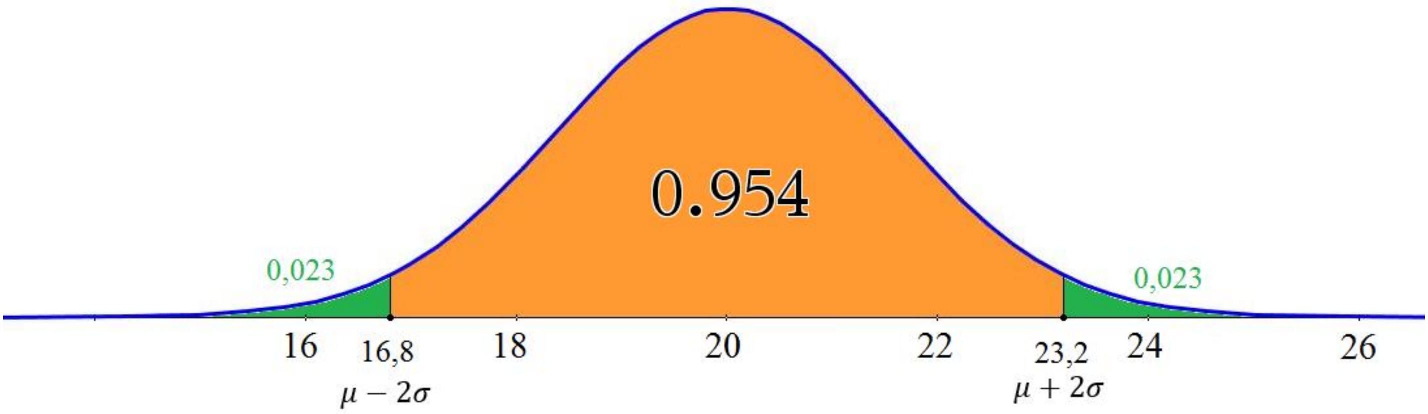
puis on choisit **normalFRép(**

On complète la boite de dialogue : La moyenne est de $\mu = 20$ et l'écart type de $\sigma = 1{,}6$:
On entre la borne inférieure : 23,6 et 10^{99} pour la borne supérieure qui correspond à $+\infty$ pour la calculatrice.

On obtient ainsi $\boxed{\boldsymbol{p(X \geq 23,2) \approx 0,023}}$



On peut aussi raisonner graphiquement :
D'après le cours $p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$ d'où :



Ainsi $p(X \geq 23{,}2) \approx 0{,}023$

$\boxed{\text{L'affirmation 1 est fausse}}$.

• Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose :

$$Z = \frac{iz}{z-2}$$

Affirmation 2 ***: L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point $A(1;0)$.***

Z existe si et seulement si $z \neq 2$, ce qu'on considèrera par la suite :

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{iz}{z-2}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|iz|}{|z-2|} = 1 \Leftrightarrow |iz| = |z-2| \Leftrightarrow |i| \times |z| = |z-2| \Leftrightarrow |z| = |z-2|$$

Si on note O l'origine du repère et $B(2)$ alors $|Z| = 1 \Leftrightarrow OM = BM$.

M appartient à la médiatrice du segment $[OB]$. Et cette médiatrice passe par le point $A(1;0)$. On remarque aussi que cette médiatrice ne contient pas le point $B(2)$.

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 ***: Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.***

Z existe si et seulement si $z \neq 2$, ce qu'on considèrera par la suite :

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{iz}{z-2}\right)} = -\frac{iz}{z-2} \Leftrightarrow \frac{\overline{i.z}}{\overline{z-2}} = -\frac{iz}{z-2} \Leftrightarrow \frac{-i.\bar{z}}{\bar{z}-2} = -\frac{iz}{z-2}$$
$$\Leftrightarrow -i.\bar{z}(z-2) = -iz(\bar{z}-2) \Leftrightarrow -i.\bar{z}z + 2i.\bar{z} = -iz\bar{z} + 2iz \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $Z \in \mathbb{R}$ avec $z \neq 2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ avec $z \neq 2$.

L'énoncé considérant que z est toujours différent de 2, alors **l'affirmation 3 est vraie**.

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4 + 6e^{-2x}}$$

Affirmation 4 ***: L'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.***

$f(x) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{3}{4+6e^{-2x}} = 0,5 \Leftrightarrow 3 = 2 + 3e^{-2x} \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -2x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ car les deux membres sont positifs stricts.

On obtient ainsi : $x = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 3$.

Conclusion : **L'affirmation 4 est vraie**.

Affirmation 5 *: L'algorithme suivant affiche en sortie la valeur 0,54.*

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0
	Y prend la valeur $\frac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y < 0{,}5$
	X prend la valeur $X + 0{,}01$
	Y prend la valeur $\frac{3}{4+6e^{-2X}}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

Lorsque X vaut 0,54 alors $Y = \frac{3}{4+6e^{-2\times 0{,}54}} \approx 0{,}497$ qui est inférieur à 0,5. Donc la boucle continue.
X prend la valeur 0,55 et alors $Y = \frac{3}{4+6e^{-2\times 0{,}55}} \approx 0{,}5002$ et la boucle s'arrête.
L'algorithme affiche donc 0,55.

L'affirmation 5 est fausse.

On peut le vérifier à l'aide de sa calculatrice :