Bac S 2015 – Métropole - Correction épreuve de mathématiques.

Exercice 3 : 3 points – Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1°) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

2°) On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.

a) Calculer le module et un argument du nombre a.

b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle C de centre O dont on déterminera le rayon.

d) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3°) On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives

$a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

a) Montrer que $b' = 8$.

b) Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4°) On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a) On note r,s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B], [B'C]$ et $[C'A]$.

Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

CORRECTION

1°) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

On est en présence d'une équation du second degré à coefficients réels, calculons le discriminant :

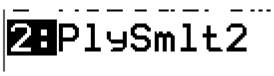
$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 64 = -192$$

$\Delta < 0$ l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$z = \frac{8-i\sqrt{192}}{2} = \frac{8-i8\sqrt{3}}{2} = 4 - 4i\sqrt{3}$ ou $z = 4 - 4i\sqrt{3}$

Vérifions ce résultat avec notre TI83 Premium :

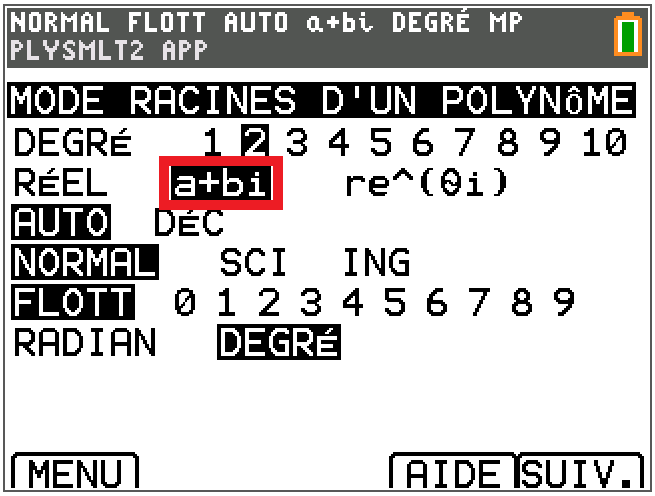
Appuyons sur 

et choisissons 

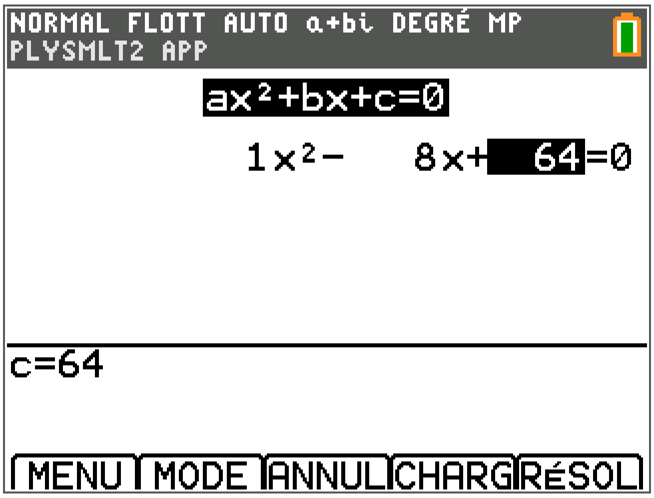
Puis 

.

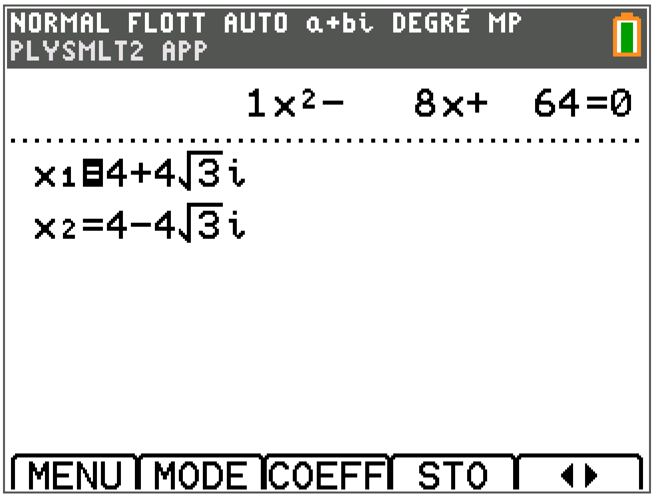
Il faut demander à la calculatrice de donner des solutions dans $\mathbb{C}$ en sélectionnant $a + bi$:



On appuie sur suivant en on entre les coefficients :



Puis on résout en appuyant sur RESOL :



Ce qui confirme bien nos résultats.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$**.**

2°) On considère les points A, B et C d'affixes respectives
$a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.

a) Calculer le module et un argument du nombre a.

$|a| = |4 + 4i\sqrt{3}| = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64} = 8$
Cherchons maintenant un argument de a :
$a = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ donc $Arg(a) = \frac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$.

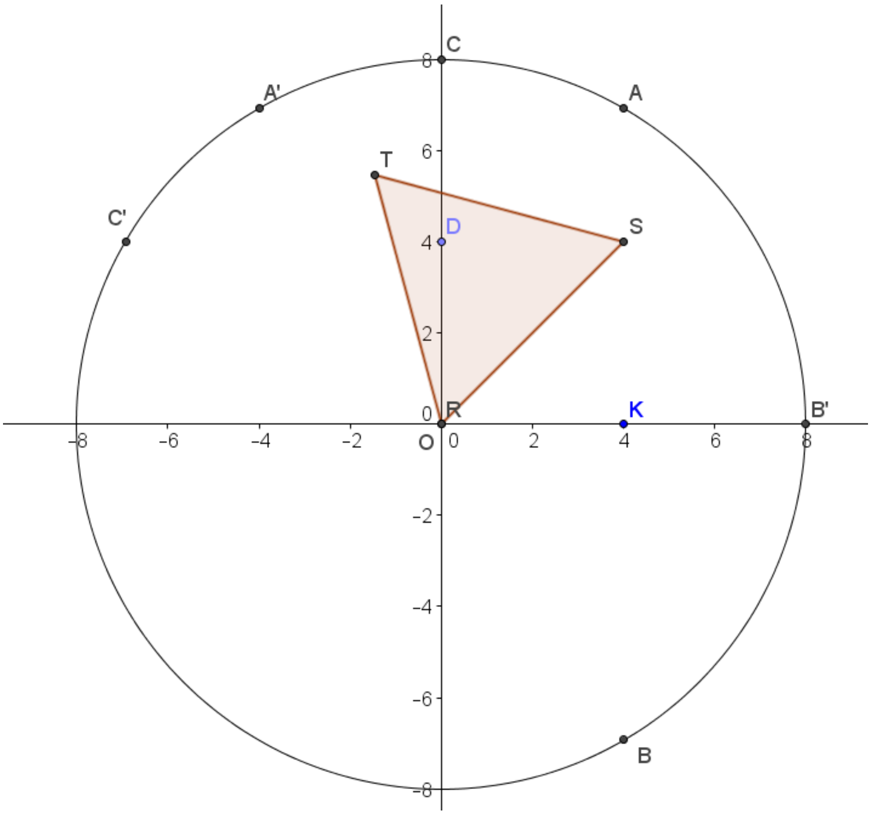
b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

$a = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ de plus b est le conjugué de a donc $b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle C de centre O dont on déterminera le rayon.

On remarque que $|a| = 8$, $|b| = 8$ et $|c| = |8i| = 8$, ainsi $OA = OB = OC = 8$,
donc les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 8.

d) Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.



3°) On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

a) Montrer que $b' = 8$.

$b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'après la question 1°) b).

Ainsi $b' = 8 \times e^0 = 8$.

b) Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

$a' = ae^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'après 1°) b) donc $a' = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On en déduit que le module de a' est 8 et un argument est $\frac{2\pi}{3}$.

4°) On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B], [B'C]$ et $[C'A]$.

Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.

On a $r = \frac{a'+b}{2} = \frac{-4+4i\sqrt{3}+4-4i\sqrt{3}}{2} = 0$

$s = \frac{b'+c}{2} = \frac{8+8i}{2} = 4+4i$

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Il semble que le triangle RST soit équilatéral :

$RS = |s-r| = |4+4i\ -0| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$RT = |t-r| = \left|2-2\sqrt{3}+i\left(2+2\sqrt{3}\right)\ -0\right| = \sqrt{\left(2-2\sqrt{3}\right)^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)^2}$
$= \sqrt{4-8\sqrt{3}+12+4+8\sqrt{3}+12} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$ST = |t-s| = \left|2-2\sqrt{3}+i\left(2+2\sqrt{3}\right)\ -(4+4i)\right| = \sqrt{\left(-2-2\sqrt{3}\right)^2+\left(-2+2\sqrt{3}\right)^2}$
$= \sqrt{4+8\sqrt{3}+12+4-8\sqrt{3}+12} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Conclusion : $RS = RT = ST = 4\sqrt{2}$, le triangle RST est bien équilatéral.