PROBABILITÉS 2

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9% des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que

- 96% des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97% des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,876 3.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage, ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leq 4) = 0{,}5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
Calculer la valeur exacte de λ.

2. On prendra ici λ= 0,1733.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

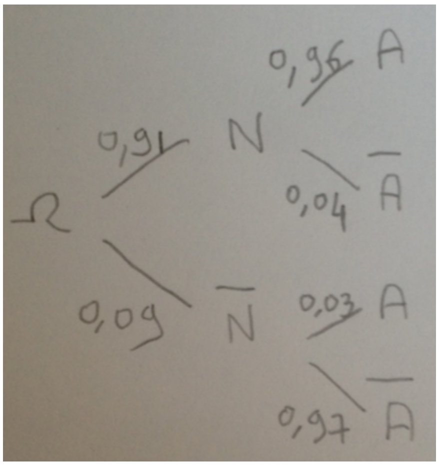
Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J , où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que μ = 358 jours.

1. Soit $X = \frac{J-358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?
2. On sait que $P(J \leq 385) = 0{,}975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

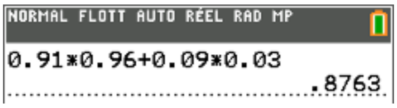
CORRIGÉ

Partie A
1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.



2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,876 3.

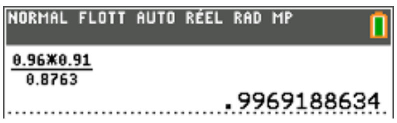
On cherche à calculer $p(A)$. D'après l'arbre on a $p(A) = p(N) \times p_N(A) + p(\overline{N}) \times p_{\overline{N}}(A)$
Ainsi $p(A) = 0{,}91 \times 0{,}96 + 0{,}09 \times 0{,}03 = 0{,}8763$



3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

On cherche à calculer $p_A(N)$: cette probabilité ne se lit pas sur l'arbre, on va donc utiliser une formule du cours :

$$p_A(N) = \frac{p(A \cap N)}{p(A)} = \frac{p_N(A) \times p(N)}{p(A)} = \frac{0{,}96 \times 0{,}91}{0{,}8763} \approx 0{,}9969$$



Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage, ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leq 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice. Calculer la valeur exacte de λ.

$P(D \leq 4) = 0{,}5$ signifie qu'il y a 50% de chance que la peluche vive moins de 4 ans.
On sait que D suit une loi exponentielle de paramètre λ donc d'après le cours :

$$P(D \leq 4) = \int_0^4 \lambda e^{-\lambda t} dt \text{ . Calculons cette intégrale :}$$

$$\int_0^4 \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^4 = -e^{-4\lambda} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-4\lambda}$$

Ce qui nous donne $1 - e^{-4\lambda} = 0{,}5 \Leftrightarrow e^{-4\lambda} = 0{,}5 \Leftrightarrow \ln\left(e^{-4\lambda}\right) = \ln(0{,}5) \Leftrightarrow -4\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-4} = \frac{\ln 2}{4}$
car $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

Conclusion : $\lambda = \frac{\ln 2}{4}$

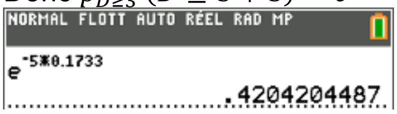
2. On prendra ici λ= 0,1733.

Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

On nous demande de calculer $p_{D\geq 3}\,(D \geq 3+5)$. On peut faire le calculer en utilisant la propriété du cours sur les probabilités conditionnelles, mais il y a plus simple !
En effet, D suit une loi de durée de vie sans vieillissement ainsi $p_{D\geq 3}\,(D \geq 3+5) = p\,(D \geq 5)$

$$\text{Ainsi } p\,(D \geq 5) = 1 - p\,(D < 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^5 = 1 + \left[e^{-\lambda t}\right]_0^5 = 1 + e^{-5\lambda} - e^{-0} = e^{-5\lambda}$$

Donc $p_{D\geq 3}\,(D \geq 3+5) = e^{-5\lambda} \approx 0{,}4204$



Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J , où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que μ = 358 jours.

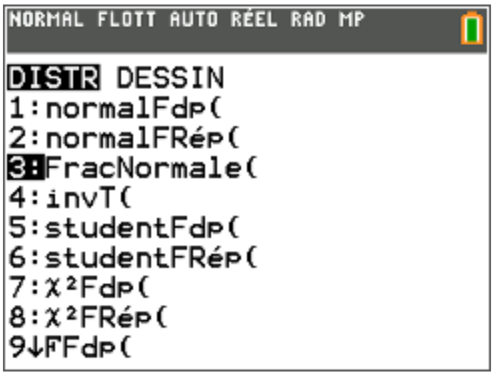
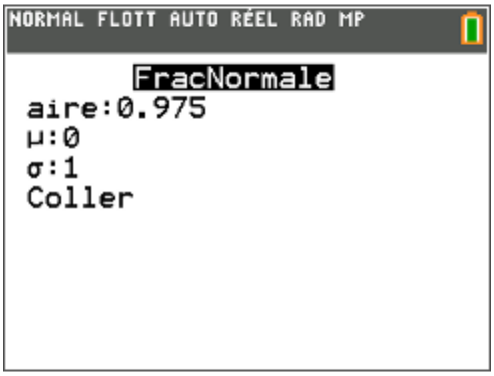
1. Soit $X = \frac{J-358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?

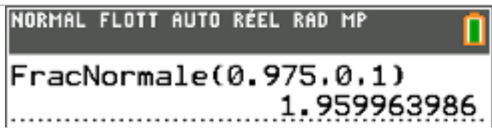
J suit une loi normale de moyenne $\mu = 358$ et d'écart type σ. Donc d'après le cours, $X = \frac{J-358}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

2. On sait que $P(J \leq 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

$$p(J \leq 385) = 0{,}975 \Leftrightarrow p(J - 358 \leq 385 - 358) = 0{,}975 \Leftrightarrow p\left(\frac{J-358}{\sigma} \leq \frac{27}{\sigma}\right) = 0{,}975$$

$$\Leftrightarrow p\left(X \leq \frac{27}{\sigma}\right) = 0{,}975$$

On va utiliser la calculatrice pour calculer $\frac{27}{\sigma}$: Appuyons sur  puis on choisit FracNormale.	
On complète la boite de dialogue :	
Ici la moyenne est $\mu = 0$ et l'écart type $\sigma = 1$ car X suit une loi normale centrée réduite.	

On obtient alors :	
Ainsi $\frac{27}{\sigma} = 1{,}95996$ soit $\sigma = \frac{27}{1{,}95996} \approx 14$ arrondie à l'entier le plus proche.