EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d' aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L' institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.
b) Quelle est la meilleure valeur approchée de $P(X \geq 400)$ parmi les nombres suivants?

0,92   0,93   0,94   0,95

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400?

Partie B - Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.
2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l' intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C - Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que, la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d' entre elles ne sont pas sincères et répondent Je contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère ;
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

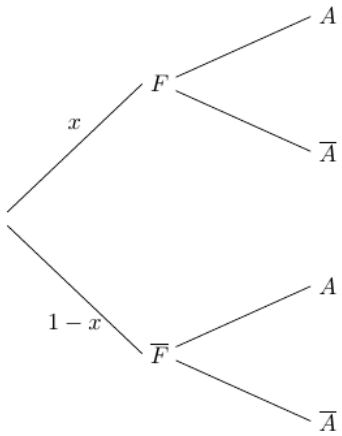
Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'événement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\bar{F}$ l'événement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'événement« la personne affirme qu' elle est favorable au projet»;
- $\bar{A}$ l'événement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d' après les données, on a $P(A) = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $p_F(A)$ et $p_{\bar{F}}(A)$.
2. On pose $x = P(F)$.
   a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
   b) En déduire une égalité vérifiée par le réel x.
3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.



CORRECTION

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A - Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.
a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

On est en présence d'une expérience aléatoire à 2 issues possibles : La personne interrogée répond à la question ou son contraire, qu'on répète 700 fois de suite de façon indépendante.
Ceci constitue un schéma de Bernoulli.

X est la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées par les 700 personnes, qui acceptent de répondre à la question posée.
X suit une loi binomiale de paramètre $n = 700$ et $p = 0,6$.

---

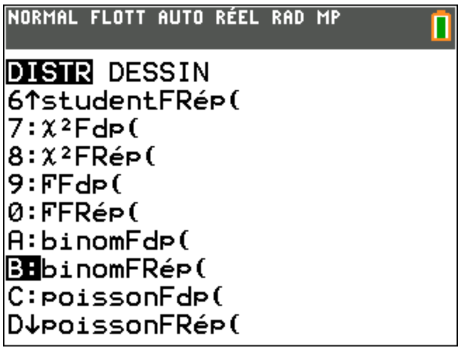
1. b) Quelle est la meilleure valeur approchée de $P(X \geq 400)$ parmi les nombres suivants?
0,92 0,93 0,94 0,95

La calculatrice TI83 Premium CE permet de calculer des probabilités du type $p(X \leq k)$. On a donc transformer $p(X \geq 400)$ pour se ramener à un calcul que la calculatrice peut faire :

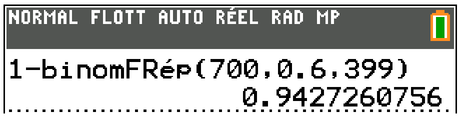
$$P(X \geq 400) = 1 - P(X < 400) = 1 - P(X \leq 399)$$

Pour calculer $1 - p(X \leq 399)$ on appuie sur

puis on choisit **binomFRép (**



On complète la boite de dialogue :



$\boldsymbol{p(X \geq 400) \approx 0,94}$

---

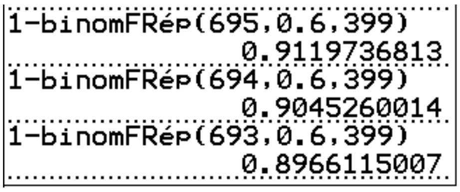
2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400?

Soit X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes répondant au sondage sur n personnes interrogées.
X_n suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0{,}6$.

On cherche la plus petite valeur de n telle que $p(X_n \geq 400) \geq 0{,}9$.

On a $p(X \geq 400) = 1 - p(X \leq 399)$.

On obtient ainsi avec sa TI83 Premium CE :



On trouve $\boldsymbol{n = 694}$.

Partie B - Proportion de personnes favorables au projet dans la population

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

Soit f la fréquence des personnes favorables au projet d'aménagement dans l'échantillon de n personnes.

D'après l'énoncé, $f = 0{,}29$.

On a $f \in [0{,}2; 0{,}8]$ et $n \geq 30$ donc d'après le théorème de l'intervalle de confiance, dans plus de 95%, la proportion p de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale vérifie :

$$p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \text{ soit } \boldsymbol{p \in \left[0{,}29 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0{,}29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}$$

---

2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

L'amplitude de l'intervalle obtenu dans la question précédente est $f + \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$
On recherche donc $n \in \mathbb{N}^*$ (et $n \geq 30$) tel que $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}04 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{2}{0{,}04} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 50 \Leftrightarrow n \geq 2500$,

Conclusion : On doit avoir $\boldsymbol{n \geq 2500}$.

Partie C - Correction due à l'insincérité de certaines réponses

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $p_F(A)$ et $p_{\overline{F}}(A)$.

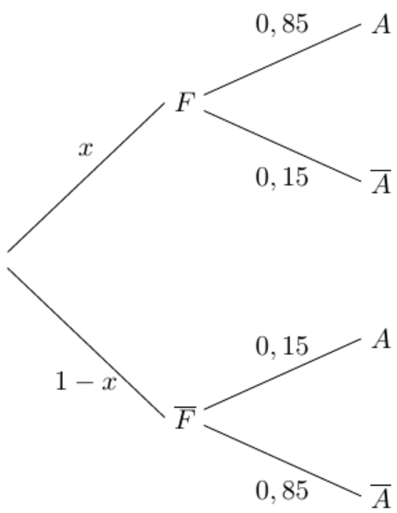
$p_F(A)$ est la probabilité que la personne affirme être favorable au projet sachant qu'elle est en réalité favorable au projet. On sait d'après l'énoncé que 15% des réponses ne sont pas sincère quelquesoit l'opinion de la personne interrogée.
Donc $p_F(\bar{A}) = 0{,}15$, soit $p_F(A) = 1 - 0{,}15$ donc $\boldsymbol{p_F(A) = 0,15}$.

De même $\boldsymbol{p_{\overline{F}}(A) = 0,15}$.

---

2. a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

En utilisant les résultats de la question précédente, on obtient :



2. b) En déduire une égalité vérifiée par le réel x.

D'après l'arbre on a :

$$p(A) = 0{,}85x + 0{,}15(1 - x)$$

Or d'après l'énoncé, $p(A) = 0{,}29$ on obtient l'équation :

$$\boldsymbol{0,85x + 0,15(1 - x) = 0,29}$$

---

3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

En reprenant l'égalité précédente $0{,}85x + 0{,}15(1 - x) = 0{,}29 \Leftrightarrow 0{,}7x + 0{,}15 = 0{,}29 \Leftrightarrow x = \frac{0{,}14}{0{,}7}$
On trouve ainsi $\boldsymbol{x = p(F) = 0,2}$.
