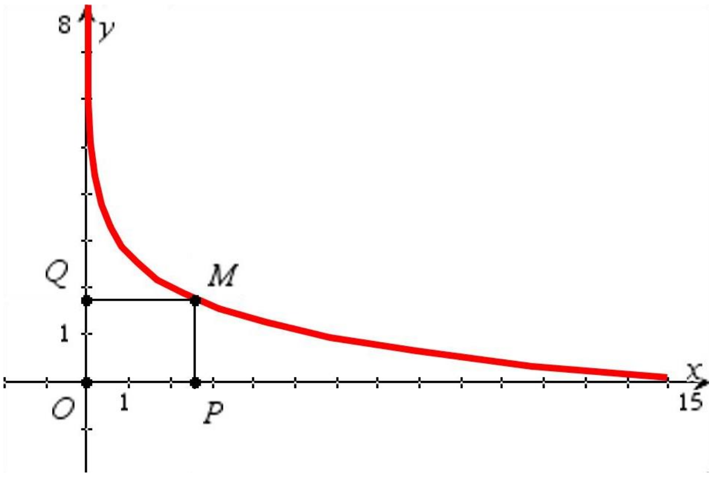
EXERCICE 4 : **3 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $]0;14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

La courbe représentative C_f de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre :



À tout point M appartenant à C_f on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur C_f ?
- L'aire du rectangle $OPMQ$ peut-elle être maximale ?
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.
  Justifier les réponses.

CORRECTION

EXERCICE 4 : **3 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $]0; 14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.
• L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur C_f ?

Soit $M(x, f(x))$ donc $P(x, 0)$, $Q(0, f(x))$ et $O(0,0)$.
Ainsi l'aire du rectangle $OPMQ$ est $A = OP \times OQ = x \times f(x)$ car $x > 0$ et $f(x) \geq 0$.
Donc $A = x \times \left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.
Si $x = 2$ alors $A = 4 - 2\ln 1 = 4$
Si $x = 2e$ alors $A = 4e - 2e\ln(e) = 4e - 2e = 2e$.
Or $4 \neq 2e$ donc l'aire du rectangle $OPMQ$ n'est pas constante.

- ***L'aire du rectangle $OPMQ$ peut-elle être maximale ?***
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.
  Justifier les réponses.

Pour déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale, on va étudier la fonction g définie sur $]0,14]$ par $g(x) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$:

La fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ est dérivable sur $]0,14]$ car c'est une fonction polynôme, de plus elle est positive stricte sur $]0,14]$, donc la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $]0,14]$ d'après le cours.
La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0,14]$ car c'est une fonction polynôme.
Par produit, la fonction $x \mapsto x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $]0,14]$
Par somme g est donc dérivable sur $]0,14]$ et on a :

Pour tout $x \in]0,14]$, $g'(x) = 2 - \left(1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = 2 - \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{x}\right) = 2 - \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)$
Donc $g'(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

<u>Etudions le signe de $g'(x)$:</u>

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow e \geq \frac{x}{2}$ car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2e$, d'autre part $2e \leq 14$, donc la fonction g est croissante sur $[0,2e]$ et décroissante sur $[2e; 14]$.

$g(2e) = 2e$ (déjà calculé précédemment) et $g(14) = 2 \times 14 - 14\ln\left(\frac{14}{2}\right) = 28 - 14\ln(7)$
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$2e$		14
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖	↗	$2e$	↘	$28 - 14ln(7)$

Ce qui prouve que la fonction g admet un maximum atteint en $x = 2e$ et qui vaut $2e$.

Calculons $f(2e) = 2 - \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = 2 - \ln e = 2 - 1 = 1$.

L'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale pour $M(2e, 1)$.