Extraído de:

Introdução ao cálculo diferencial II

Funções exponenciais e logarítmicas

Grupo II

(…)

4. Seja f a função, de domínio $]1-\pi, +\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se} \quad 1-\pi<x<1 \\ 2 & \text{se} \quad x=1 \\ e^{-2x+4}+\ln(x-1) & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$$

(…)

4.3. O gráfico da função f tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa pertence ao intervalo $]1, 2[$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa desse ponto.

Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema;
- apresente a abcissa do ponto de inflexão arredondada às centésimas.

Proposta de resolução

Como a abcissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda derivada para x>1:

$$f'(x) = ((e^{-2x+4} + \ln(x-1))' = (e^{-2x+4})' + (\ln(x-1))' = (-2x+4)' \times (e^{-2x+4}) + \frac{(x-1)'}{(x-1)} = -2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}$$

$$. f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(-2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}\right)' = \left(-2e^{-2x+4}\right)' + \left(\frac{1}{x-1}\right)' =$$

$$= -2(e^{-2x+4})' + \frac{(1)'(x-1) - 1(x-1)'}{(x-1)^2} = -2 \times (-2x+4)'^{e^{-2x+4}} + \frac{0 \times (x-1) - 1 \times 1}{(x-1)^2}$$

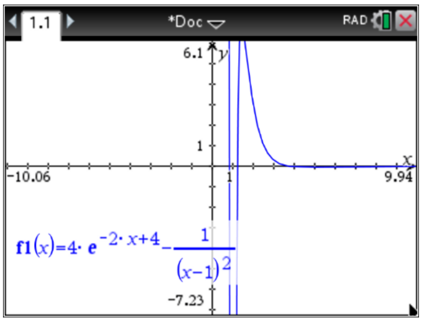
$$= -2 \times (-2)e^{-2x+4} + \frac{-1}{(x-1)^2} = -4e^{-2x+4} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

Como para determinar o ponto de inflexão precisamos de determinar o zero da segunda derivada da função, teremos de representar na calculadora gráfica f''(x) para valores de $x \in]1,2[$.

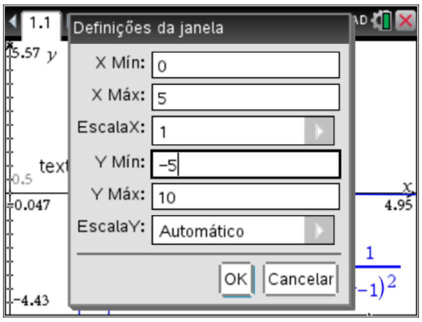
Para a resolução deste tópico utilizámos a unidade portátil TI-Nspire CX. No entanto o procedimento é semelhante para qualquer unidade portátil TI-Nspire (Clickpad, Touchpad ou CX).

No menu inicial do TI-Nspire, acessível através da tecla on, abre um novo documento (tecla 1) ou adiciona uma nova página com a aplicação Gráficos (segundo ícone).

Na linha de entrada, *f1(x)*= introduz $4e^{-2x+4} - \frac{1}{(x-1)^2}$ e prime a tecla enter.

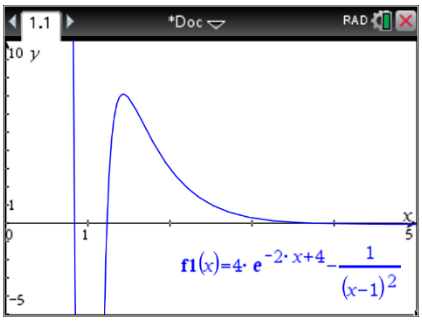


Uma vez que a janela de visualização não é a adequada para visualizar o ponto de interseção dos dois gráficos, vamos ter de ajustar a janela clicando em menu, **4:**Janela, **1:** Definições da janela.



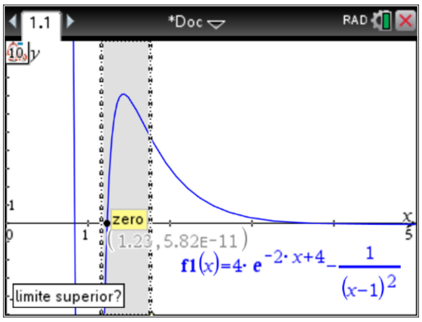
Em **X Min** coloca 0, em **X Máx**:5, em **Y Min**:-5 e em **Y Máx**:10, finalizando com enter .

Na janela verás a representação da curva de f''(x) da qual se pretende determinar o zero.



Para determinares o ponto de interseção tens de premir menu , **6:**Analisar gráfico, **1:**Zero.

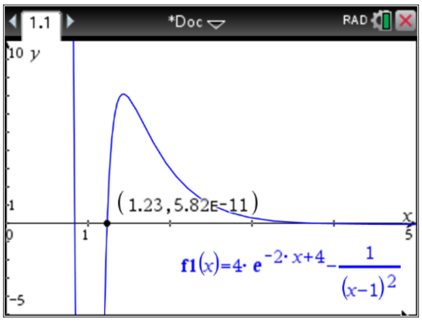
É solicitado o limite inferior (que fica à esquerda do zero) que teremos de selecionar clicando em enter e posteriormente o limite superior (à direita do zero) que selecionamos da mesma forma.



As coordenadas do zero surgirão no ecrã, e a sua abcissa aproximada (às centésimas) será:

$$x_0 \approx 1.23$$

Deverás reproduzir o referencial, os gráficos e as coordenadas do ponto de interseção na tua folha e apresentar a resposta:



A abcissa do ponto de inflexão do gráfico de f(x) no intervalo]1,2[é 1,23.