



---

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

## **Prova Escrita de Matemática A**

---

12.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

### **Prova 635/Época Especial**

---

Critérios de Classificação

11 Páginas

---

**2015**

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

### Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

### Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	B	C	C	A	C	B	C

### GRUPO II

1. .... **15 pontos**

Escrever  $z_1$  na forma trigonométrica ..... 5 pontos

Escrever  $1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$  ..... 2 pontos

Escrever  $z_1 = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^6$  ..... 1 ponto

Escrever  $z_1 = 8 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$  ..... 2 pontos

Escrever  $z_2$  na forma trigonométrica ..... 5 pontos

Escrever  $8i = 8 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$  ..... 1 ponto

Escrever  $z_2 = 8 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{6\pi}{5}\right)$  ..... 3 pontos

Escrever  $z_2 = 8 \operatorname{cis}\left(\frac{17\pi}{10}\right)$  ..... 1 ponto

Reconhecer que  $\frac{17\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{n}$  (ou equivalente) ..... 4 pontos

Obter o valor de  $n$  (10) ..... 1 ponto

2.1. .... **5 pontos**

Escrever as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP}$ , em função de  $a$  ..... 1 ponto

Reconhecer que o vetor  $\overrightarrow{OP}$  é colinear com o vetor de coordenadas  $(2, -1, 1)$  ..... 2 pontos

Obter o valor de  $a$   $\left(-\frac{1}{3}\right)$  ..... 2 pontos

**2.2.** ..... **10 pontos**

- Obter as coordenadas do ponto  $B$  ..... 1 ponto
- Indicar as coordenadas do ponto  $C$  ..... 1 ponto
- Determinar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$  ..... 1 ponto
- Determinar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AC}$  ..... 1 ponto
- Determinar a norma do vetor  $\overrightarrow{AB}$  ..... 1 ponto
- Determinar a norma do vetor  $\overrightarrow{AC}$  ..... 1 ponto
- Obter a amplitude do ângulo  $BAC$  ( $55^\circ$ ) (**ver nota**) ..... 4 pontos

**Nota** – Se forem considerados dois vetores cujo ângulo tenha amplitude diferente da amplitude do ângulo  $BAC$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

**2.3.** ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo** (recorrendo a uma condição cartesiana da reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência)

Seja  $r$  a reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência e seja  $T$  o ponto de tangência.

- Reconhecer que o vetor de coordenadas  $(2, -1, 1)$  é um vetor diretor da reta  $r$ .. 1 ponto
- Escrever uma condição cartesiana da reta  $r$   $\left(\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}\right)$ ..... 3 pontos
- Determinar as coordenadas do ponto  $T$  ..... 4 pontos
- Escrever a condição  $\frac{x}{2} = z \wedge y = -z \wedge 2x - y + z - 4 = 0$   
(ou equivalente) ..... 2 pontos
- Obter as coordenadas do ponto  $T$  ..... 2 pontos

- Obter  $\overline{OT}$  ..... 2 pontos
- Escrever a condição  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8}{3}$  (**ver notas 1 e 2**) ..... 5 pontos

**2.º Processo** (recorrendo a uma equação vetorial da reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência)

Seja  $r$  a reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência e seja  $T$  o ponto de tangência

- Reconhecer que o vetor de coordenadas  $(2, -1, 1)$  é um vetor diretor da reta  $r$ .. 1 ponto
- Escrever uma equação vetorial da reta  $r$  ..... 2 pontos
- Determinar as coordenadas do ponto  $T$  ..... 5 pontos
- Reconhecer que qualquer ponto da reta  $r$  tem coordenadas da forma  $(2k, -k, k)$ , sendo  $k$  um número real ..... 2 pontos
- Resolver a equação  $2(2k) - (-k) + k - 4 = 0$  (ou equivalente) 2 pontos
- Obter as coordenadas do ponto  $T$  ..... 1 ponto

Determinar  $\overline{OT}$  ..... 2 pontos

Escrever a condição  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8}{3}$  (ver notas 1 e 2) ..... 5 pontos

**Notas:**

1. A escrita de  $\sqrt{\frac{8}{3}}$ , em vez de  $\frac{8}{3}$ , implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

2. A escrita de  $\leq$ , em vez de  $=$ , implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

A escrita de  $<$  ou de  $>$  ou de  $\geq$  implica uma desvalorização de 3 pontos nesta etapa.

**3.1.** ..... **15 pontos**

Reconhecer que o número de casos possíveis é  $9^3$  (ver nota 1) ..... 7 pontos

Reconhecer que o número de casos favoráveis é 3 (ver nota 2) ..... 6 pontos

Obter a probabilidade pedida (ver nota 3)  $\left(\frac{1}{243}\right)$  ..... 2 pontos

**Notas:**

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a  $9^3$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se a expressão apresentada não for equivalente a 3, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo  $[0, 1]$

**3.2.** ..... **15 pontos**

A composição deve contemplar os tópicos seguintes:

A) referir que  $\frac{1}{12} = \frac{3}{9C_2}$ , sendo  ${}^9C_2$  o número de casos possíveis (número de maneiras de escolher duas de nove bolas) e 3 o número de casos favoráveis (1 e 6, 2 e 5, 3 e 4);

B) referir que, no contexto da situação descrita,  $\frac{11}{12}$  é a probabilidade de, ao serem retiradas, ao acaso, duas bolas do saco, a soma dos seus números ser diferente de 7

C) referir que  ${}^{10}C_n$  é o número de maneiras de escolher as posições dos  $n$  sucessos, na sequência das dez provas.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	13
4	Na resposta, são contemplados apenas dois tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	10
3	Na resposta, são contemplados apenas dois tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	8
2	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

4.1. .... 10 pontos

Escrever  $tmv_{[10,20]} = \frac{N(20) - N(10)}{20 - 10}$  ..... 2 pontos

Obter o valor de  $\frac{N(20) - N(10)}{20 - 10}$  com a aproximação pedida (11) ..... 3 pontos

Interpretar o valor obtido, no contexto da situação descrita ..... 5 pontos

- Ao longo do século XX o número de habitantes da referida região do globo aumentou, em média, 11 milhões por década.

OU

- Entre os instantes correspondentes a 10 e a 20 décadas, após o final do ano 1800, o número de habitantes da referida região do globo aumentou, em média, 11 milhões por década.

4.2. .... 15 pontos

Escrever  $N = \frac{200}{1 + 50e^{-0,25t}} \Leftrightarrow N(1 + 50e^{-0,25t}) = 200$  ..... 1 ponto

Escrever  $N(1 + 50e^{-0,25t}) = 200 \Leftrightarrow N + 50Ne^{-0,25t} = 200$  ..... 1 ponto

Escrever  $N + 50Ne^{-0,25t} = 200 \Leftrightarrow e^{-0,25t} = \frac{200 - N}{50N}$  ..... 2 pontos

Escrever  $e^{-0,25t} = \frac{200 - N}{50N} \Leftrightarrow -0,25t = \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right)$  ..... 3 pontos

Escrever  $-0,25t = \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,25} \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right)$  ..... 1 ponto

Escrever  $t = -\frac{1}{0,25} \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -4 \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right)$  ..... 2 pontos

Escrever  $t = -4 \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right)^{-4}$  ..... 3 pontos

Escrever  $t = \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right)^{-4} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{50N}{200 - N}\right)^4$  ..... 2 pontos



5.1. .... 15 pontos

- Determinar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ..... 13 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x})$  ..... 1 ponto
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x}) = e \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x})$  ..... 3 pontos
- Escrever  $e \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x}) = e \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$  ..... 3 pontos
- Escrever  $e \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = e \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}$  ..... 3 pontos
- Referir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$  ..... 1 ponto
- Escrever  $e \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0$  ..... 2 pontos
- Concluir que a reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal do gráfico da função  $f$  ..... 2 pontos

5.2. .... 15 pontos

- Determinar  $f'(x)$  (**ver nota**) ..... 4 pontos
- Aplicar a regra de derivação do produto de duas funções ..... 2 pontos
- Escrever  $f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x}$  ..... 2 pontos
- Escrever a equação  $f'(x) = 0$  ..... 1 ponto
- Resolver a equação  $f'(x) = 0$  ..... 5 pontos
- Escrever  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(-x^2 + 2x) = 0$  ..... 2 pontos
- Escrever  $e^{1-x}(-x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0$  ..... 2 pontos
- Concluir que  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$  ..... 1 ponto
- Estudar a função  $f$  quanto à monotonia ..... 5 pontos
- Apresentar um quadro de sinal de  $f'$  e de monotonia de  $f$  (ou equivalente) ..... 3 pontos
- Concluir que a função tem um mínimo para  $x = 0$  ..... 1 ponto
- Concluir que a função tem um máximo para  $x = 2$  ..... 1 ponto

**Nota** – Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.

**5.3.** ..... **15 pontos**

- Reproduzir o gráfico da função  $f$  no intervalo  $[0, 5]$  (ver notas 1 e 2) ..... 3 pontos
- Desenhar o quadrilátero  $[OABC]$  ..... 4 pontos
- Determinar a abscissa do ponto  $A$  ..... 2 pontos
- Determinar a abscissa dos pontos  $B$  e  $C$  ..... 2 pontos
- Escrever uma expressão que dê a área do quadrilátero  $[OABC]$  ..... 2 pontos
- Obter a área pedida  $(2,92)$  ..... 2 pontos

**Notas:**

1. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
2. Se for apresentado um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

**6.** ..... **15 pontos**

- Identificar o declive da reta  $r$  com  $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  ..... 2 pontos
- Determinar  $f'(x)$  ..... 3 pontos
- Determinar  $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ , em função de  $a$  ..... 3 pontos
- Escrever  $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$  (ou equivalente) ..... 4 pontos
- Obter o valor de  $a\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$  ..... 3 pontos

## COTAÇÕES

### GRUPO I

1. a 8..... (8 × 5 pontos) .....	40 pontos
	<hr/>
	<b>40 pontos</b>

### GRUPO II

1. ....	15 pontos
2.	
2.1. ....	5 pontos
2.2. ....	10 pontos
2.3. ....	15 pontos
3.	
3.1. ....	15 pontos
3.2. ....	15 pontos
4.	
4.1. ....	10 pontos
4.2. ....	15 pontos
5.	
5.1. ....	15 pontos
5.2. ....	15 pontos
5.3. ....	15 pontos
6. ....	15 pontos
	<hr/>
	<b>160 pontos</b>

**TOTAL** ..... **200 pontos**