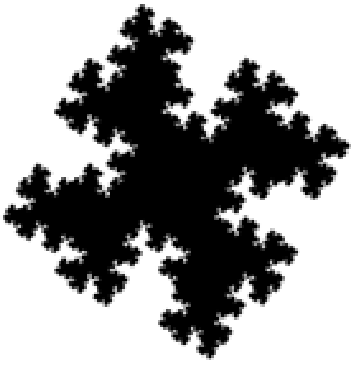
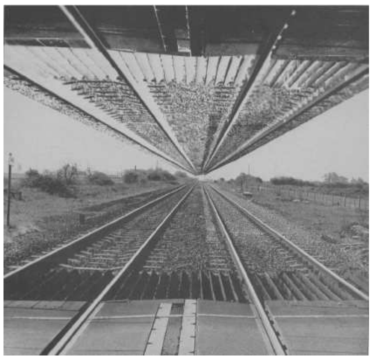
MATEMATIK OG UENDELIGHED

Grænser for kognition:
At begrebsliggøre det ubegribelige... Uendelighed!?



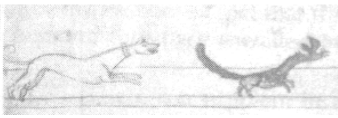
Kløverø



Parallelle linjers skæring!?

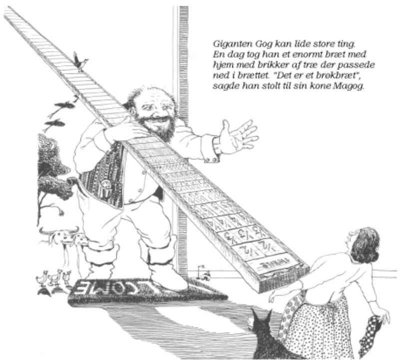
Hilberts hotel

Magisk trappe

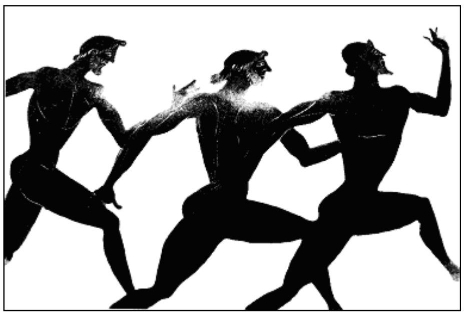


Hund efter hare

Øliv – Øvliv!



Eventyr



Achilleus og skildpadden

Materiale udarbejdet til tværfagligt forløb for 1.x 2010
Deltagende fag: Dansk, Religion og Matematik

Udarbejdet af:

Brian Olesen & Bjørn Felsager
Midtsjællands Gymnasieskoler

Grænser for kognition: At begrebsliggøre det ubegribelige… Uendelighed!?
Tværfagligt forløb for 1.x 2010 med matematik, dansk og religion

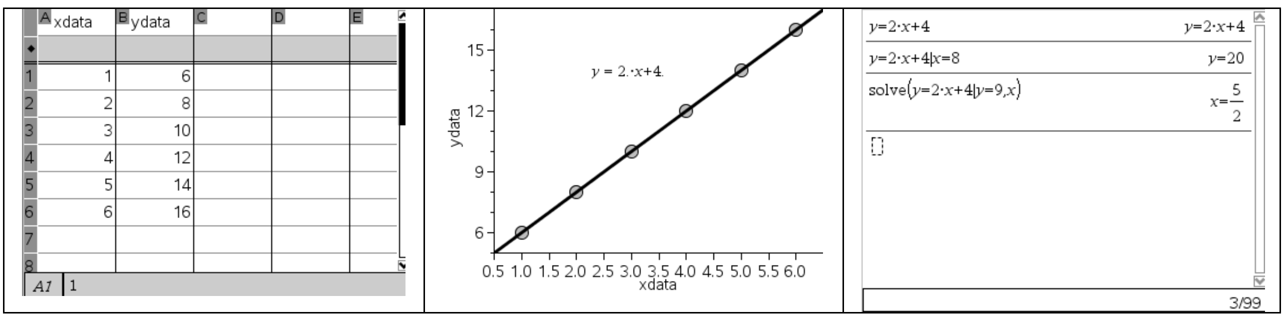
Indholdsfortegnelse

Formål med materiale

I matematik anvender vi i dette forløb forskellige repræsentationsformer til kognitivt at begribe det ubegribelige — uendelighed. I materialet skal eleverne gennem de forskellige repræsentationsformer opleve at forstå dybden i en række paradokser knyttet til uendelighed.

Samtidigt er det målet at udvikle elevernes repræsentationskompetence, således at eleverne rustes til at løse ukendte problemstillinger. Eleverne skal altså forstå hvorfor vi i matematik udvikler deres repræsentationskompetencer. Dermed vil de aktivt kunne anvende forskellige repræsentationer til at begribe og løse nye og ukendte problemstillinger.

I forløbet vil der især være fokus på repræsentationerne: tabeller (numerisk repræsentation), grafer (geometrisk repræsentation) og formler (symbolsk repræsentation) som kognitive "hjælpeværktøjer":



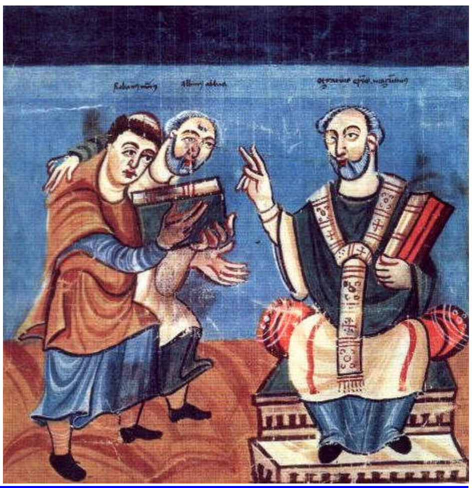
Propositiones ad acuendos juvenes
(Problems to Sharpen the Young)

Et skrift fra middelalderen skrevet på latin har titlen ”Propositiones ad acuendos juvenes”. Titlen oversættes til engelsk som ”Problems to Sharpen the Young” [1] som vi til dansk ville kunne oversætte til ”Opgaver for at skærpe den unges intellekt”. Manuskriptet er en af de tidligste kendte samlinger af ”rekreative” matematiske opgaver.

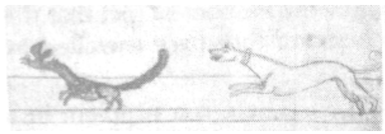
Det ældste kendte eksemplar af manuskriptet stammer fra slutningen af 800-tallet. Teksten er tilskrevet Alcuin af York (død 804). Alcuin af York var en lærd, gejstlig, digter og lærer fra York og er bl.a. ansvarlig for at indføre de små bogstaver. Han anses desuden for at være blandt de vigtigste arkitekter i den karolingiske renæssance.

Nogle udgaver af teksten indeholder 53 opgaver, mens andre indeholder 56 opgaver. Opgaverne er opstillet mere eller mindre tilfældigt (uden hensyn til fx sværhedsgrad/taksonomi) og inkluderer alle en løsning på de opstillede problemer.

Vi vil herunder behandle én af opgaverne fra manuskriptet nemlig opgave nummer 26 som er vist herunder:



Raban Maur (til venstre), med støtte fra Alcuin (i midten), dedikerer sit arbejde til Otgar ærkebiskoppen af Mainz (til højre)



XXVI. PROPOSITIO DE CVRSV CANIS AC FVGA LEPORIS. Est campus, qui habet in longitudine pedes CL. In uno capite stabat canis, et in alio stabat lepus. Promouit namque canis ille post illum, scilicet leporem currere. Ast ubi ille canis faciebat in uno saltu pedes VIIII, lepus transmittebat VII. Dicat, qui uelit, quot pedes, quotque saltus canis persequendo, et lepus fugiendo, quoadusque comprehensus est, fecerunt [Bed., confecerint].

Solutio
Longitudo huius uidelicet campi habet pedes CL. Duc mediam de CL, fiunt LXXV. Canis uero faciebat in uno saltu pedes VIIII, quippe LXXV nouies ducti fiunt DCLXXV, tot pedes leporem consequendo canis cucurrit, quoadusque eumcomprehendit dente tenaci. At uero, quia lepus faciebat pedes VII, in uno saltu, duc ipsos LXXV septies. Tot uero pedes lepus fugiendo peregit, donec consecutus est.

Prøv at afkode den latinske tekst. Har du et bud på en oversættelse af nogle af ordene? Hvis du kender til romertallene, vil du kunne aflæse størrelserne nævnt i teksten.

Dine noter:

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_Acuendos_Juvenes

Teksten er oversat til engelsk af John Hadley and David Singmaster[2]:

> *"There is a field 150 feet long. At one end is a dog, and at the other a hare. The dog chases when the hare runs. The dog travels 9 feet in a jump, while the hare travels 7 feet. How many feet will be traveled by the pursuing dog and the fleeing hare before the hare is seized?"*

Opgaven går altså ud på at finde ud af, hvornår hunden indhenter haren, idet de til at begynde med står i hver deres ende af en mark, der er 150 fod lang. Det oplyses, at haren løber med 7 fod pr. spring og hunden med 9 fod pr. spring. Det er underforstået at haren løber væk fra hunden, i samme øjeblik den opdager hunden (hvilket giver mening) og at hunden straks sætter efter haren. Men det er tilsyneladende også underforstået, at hunden og haren springer med den samme frekvens, dvs. at deres spring tager lige lang tid! Vi skal altså forestille os at hunden og haren for hvert spring sætter af på samme tid og lander samtidigt. Da hunden når længere for hvert spring må hunden på et eller andet "tidspunkt" indhente haren, der har fået et "forspring" på 150 fod.

Bemærk at det for os er naturligt at anvende tidsbegrebet for at finde det øjeblik (tidspunkt) hvor hunden indhenter haren. Men i middelalderen fandtes der ingen ure, hvorfor opgaven er stillet under de omtalte forudsætninger, hvor man behændigt undgår at komme ind på tiden.

Som tidligere nævnt var der med opgaven også givet en løsning. Inden vi se på oversættelsen af løsningen, kan vi forsøge selv at give vores bud, idet vi først løser opgaven ved hjælp af ***tabeller som repræsentationsform***.

Vi åbner et **Lister og Regneark** i TI-Nspire og navngiver tre søjler henholdsvis **spring**, **hund** og **hare**.

	A spring	B hund	C hare
◆			
1			
2			
3			

Den første liste **spring** er udtryk for hvor mange spring hunden og haren har lavet. Vi ønsker at undersøge de 100 første spring, idet vi inkluderer det 0'te spring med hvor haren og hunden netop har opdaget hinanden. For at lave en liste, der går fra 0 til 100 bruger vi kommandoen **seq**(n, n, 0, 100), der giver os den ønskede liste. Kommandoen skrives i formellinjen under titlen for søjlen **spring**:

A spring
=seq(n,n,0,100)

	A spring	B hund	C hare
◆	=seq(n,n,0,100)		
1	0		
2	1		
3	2		

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_Acuendos_Juvenes

Ved det 0'te spring har hunden ikke tilbagelagt nogen distance hvorimod haren har et forspring på 150 fod. Efter det 1. spring hvor hunden og haren har opdaget hinanden og har sat i fuld firspring, har hunden tilbagelagt en distance på 9 fod mod harens 157 fod (inklusiv forspringet). Disse oplysninger skriver vi ind i tabellen:

	A spring	B hund	C hare
◆	=seq(n,n,0,100)		
1	0	0	150
2	1	9	157
3	2		

Som nævnt ovenfor vil hunden og hare for hvert spring tilbagelægge hhv. 9 fod og 7 fod mere. Derfor markerer vi de fire celler i regnearket, højre-klikker og vælger **Udfyld nedad**. Med piletasterne styrer vi til "bunden" af listen ved spring nr. 100:

	A spring	B hund	C hare	D	E
◆	=seq(n,n,0,100)				
1	0	0	150		
2	1	9	157		
3	2				
4	3				
5	4				
6	5				
7	6				
8	7				

Klip
Kopier
Sæt ind
Udfyld nedad
Slet celler
Sorter

	spring	B hund	C hare
◆	seq(n,n,0,100)		
99	98		
100	99		
101	100		

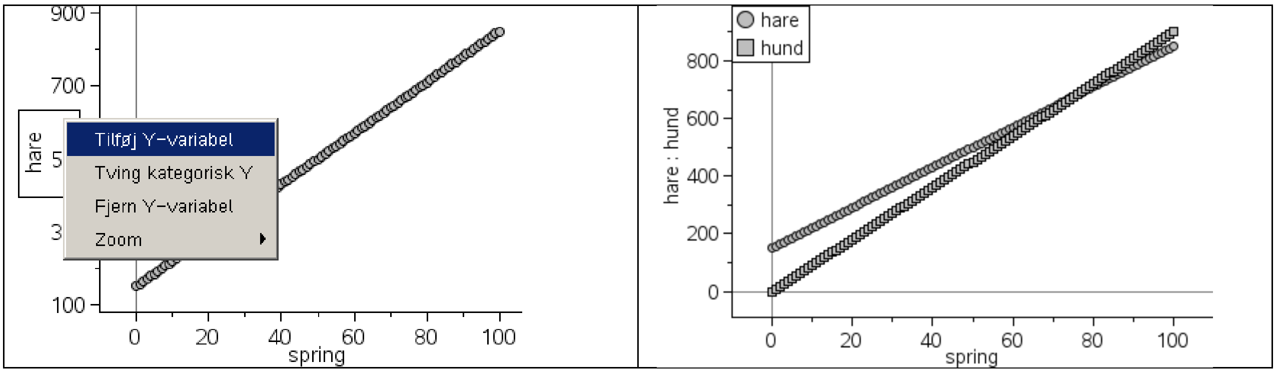
Vi ser at hunden ved spring nr. 100, for længst er nået forbi haren:

	A spring	B hund	C hare
◆	=seq(n,n,0,100)		
99	98	882	836
100	99	891	843
101	100	900	850

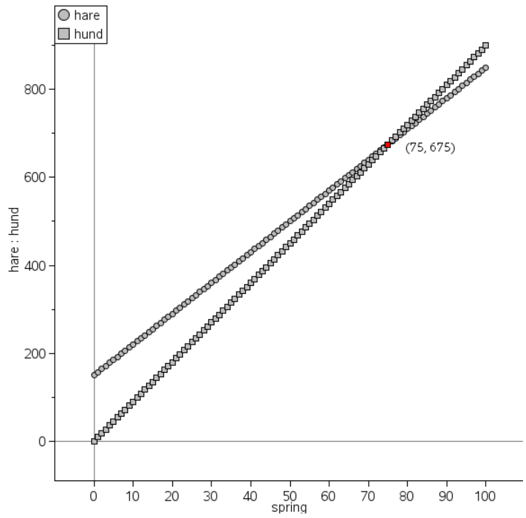
Går vi op i tabellen finder vi det spring, hvor hunden indhenter haren. Nemlig ved spring nr. 75, hvor hunden har tilbagelagt 675 fod og haren 675 – 150 = 525 fod:

	A spring	B hund	C hare
◆	=seq(n,n,0,100)		
73	72	648	654
74	73	657	661
75	74	666	668
76	75	675	675
77	76	684	682

Vi har nu med en tabel som repræsentationsform løst opgaven. Vi kan udvide vores undersøgelse ved at understøtte vores løsning med ***grafer som repræsentationsform***. Vi splitter vinduet i to og tilføjer en **Data og Statistik** applikation. På *x*-aksen tilføjer vi **spring** som uafhængig variabel og på *y*-aksen tilføjer vi både harens og hundens tilbagelagte distance som afhængige variable idet vi højre-klikker og vælger **Tilføj Y-variabel**:



Vælger vi et tilfredsstillende zoom kan vi se at hunden indhenter haren ved spring nr. 75, efter at have tilbagelagt 675 fod.



Vi indser at distancerne haren og hunden tilbagelægger begge kan beskrives ved lineære sammenhænge. Vi kunne finde disse lineære sammenhænge ved at udnytte lineær regression, men det venter vi lidt med. Først vil vi forsøge os med en ***symbolsk repræsentationsform***, idet vi vil prøve at løse opgaven ved ligningsløsning.

Lad x som *uafhængig variabel* være udtryk for antallet af spring og y som *afhængig variabel* være udtryk for den tilbagelagte distance målt i fod.

Udgangspunktet for hunden svarer til en begyndelsesværdi på 0 fod og grafen for sammenhængen går gennem (0, 0). Der er tale om en *konstant vækst* idet hunden springer 9 fod for hvert spring. Altså er der tale om *ligefrem proportional vækst* og sammenhængen kan beskrives ved ligningen $y = 9 \cdot x$ eller $\text{distance}_{\text{hund}} = 9 \cdot \text{spring}$.

I harens tilfælde er der også tale om en *konstant vækst*, idet haren springer 7 fod for hvert spring. Eftersom haren har et forspring på 150 fod er dens begyndelsesværdi givet som 150 fod (grafen for den lineære sammenhæng skærer *y*-aksen ved $y = 150$).

Altså kan sammenhængen for haren beskrives ved ligningen $y = 7 \cdot x + 150$ eller $\text{distance}_{\text{hare}} = 7 \cdot \text{spring} + 150$.

Opgaven går som tidligere nævnt ud på at bestemme det spring, hvor hunden indhenter haren, hvilket svarer til at bestemme den *x*-værdi (spring), hvor haren og hunden har tilbagelagt den samme distance (*y*-værdi), idet harens distance inkluderer forspringet. Da $\text{distance}_{\text{hare}} = \text{distance}_{\text{hund}}$ kan vi opstille følgende ligning:

$$9 \cdot \text{spring} = 7 \cdot \text{spring} + 150 \quad \text{eller} \quad 9 \cdot x = 7 \cdot x + 150$$

Ved at trække $7 \cdot x$ fra på begge sider får vi at $2 \cdot x = 150$ og ved at dividere med 2 på begge sider indser vi at hunden indhenter haren efter $x = 75$ spring.

For at bestemme distancen, hvor hunden indhenter haren indsættes $x = 75$ i en af de to ligninger $y = 7 \cdot x + 150$ og $y = 9 \cdot x$. Ikke overraskende får vi distancen $y = 9 \cdot 75 = 675$ fod.

Med TI-Nspire kan vi løse denne opgave i et-hug ved hjælp af en **solve**-kommando. I en **Grafregner** applikation løser vi ligningssystemet $\text{distance}_{\text{hare}} = 7 \cdot \text{spring} + 150$, $\text{distance}_{\text{hund}} = 9 \cdot \text{spring}$ og $\text{distance}_{\text{hare}} = \text{distance}_{\text{hund}}$. Ligningssystemet løses med hensyn til spring:

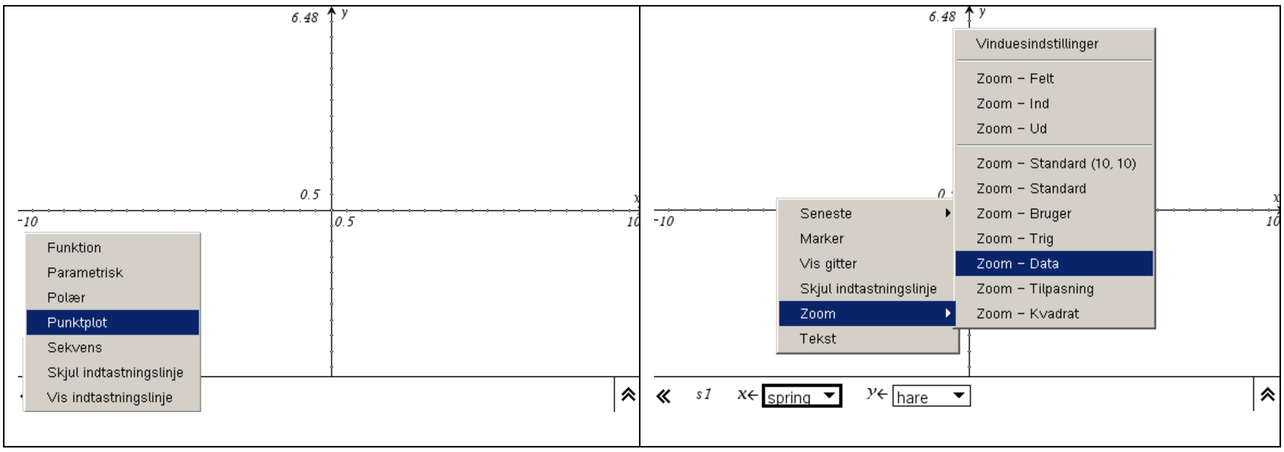
$$\text{solve}\left(\begin{cases} distance\_hund = 9 \cdot spring \\ distance\_hare = 7 \cdot spring + 150 \\ distance\_hund = distance\_hare \end{cases}, spring\right)$$

$$spring = 75 \text{ and } distance\_hare = 675 \text{ and } distance\_hund = 675$$

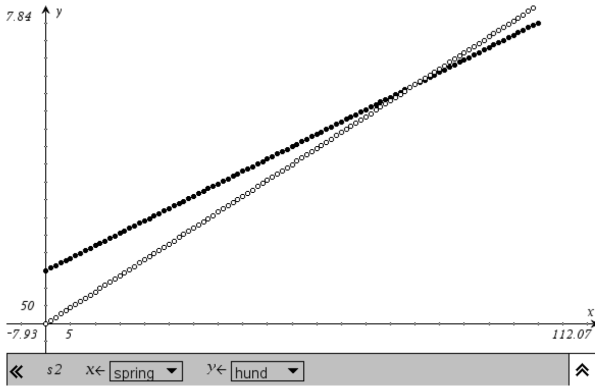
Ovenfor viste TI-Nspire CAS løsning svarer til at løse to ligninger ($y = 7 \cdot x + 150$ og $y = 9 \cdot x$) med to ubekendte (*x* og *y*), hvilket vi vil vende tilbage til ved en senere lejlighed:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y = 9 \cdot x \\ y = 7 \cdot x + 150 \end{cases}, x\right) \qquad x = 75 \text{ and } y = 675$$

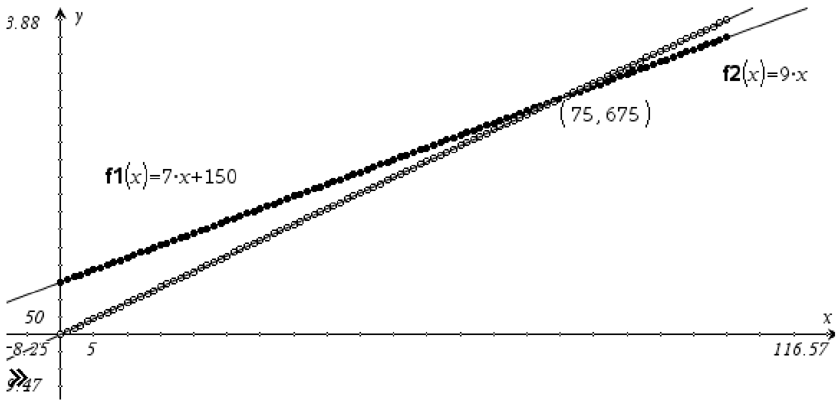
Men dette svarer grafisk til at bestemme skæringspunktet for to rette linjer. Vi kan derfor også løse problemet ved brug af en grafisk repræsentationsform. I TI-Nspire CAS opretter vi denne gang en **Grafer og Geometri** applikation under samme opgave som ovenfor. Højre-klik på indtastningslinjen for grafrummet og vælg **Punktplot**. Vælg **spring** og **hare** som hhv. *x* og *y* lister. Højre-klik i grafrummet og vælg **Zoom – Data**:



Gør tilsvarende for at få afbildet punktplottet for hundens spring over marken:



Højre-klik igen på indtastningslinjen og vælg **Funktion**. Tegn graferne for de lineære sammenhænge $y = 7 \cdot x + 150$ og $y = 9 \cdot x$ som herunder tegnes som graferne for hhv. **f1**(x) og **f2**(x). Ved hjælp af menupunktet **Skæringspunkt(er)** bestemmes den nu velkendte løsning:



Vi vender tilbage til vores middelaldertekst for at se på vedlagte løsning[3]:

> *Solution: The length of the field is 150 feet. Take half of 150, which is 75. The dog goes 9 feet in a jump. 75 times 9 is 675; this is the number of feet the pursuing dog runs before he seizes the hare in his grasping teeth. Because in a jump the hare goes 7 feet, multiply 75 by 7, obtaining 525. This is the number of feet the fleeing hare travels before it is caught.*

Altså skal forspringet haren har i forhold til hunden på de 150 halveres for at bestemme det antal spring hunden og haren udfører inden hunden kan sætte sine tænder i haren.

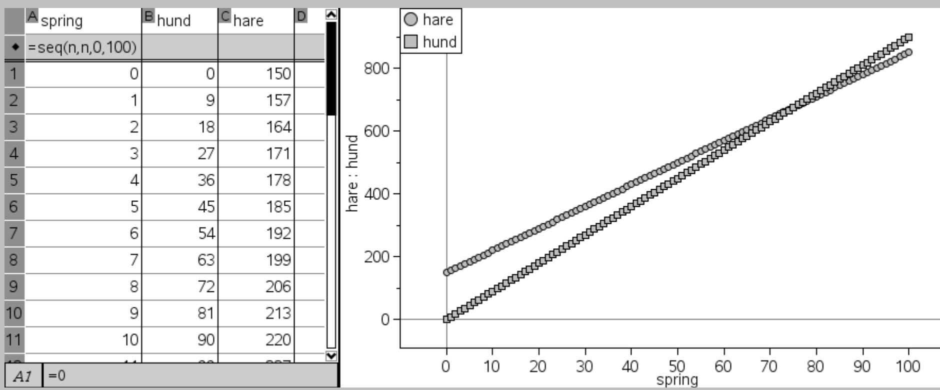
Kan du forklare hvorfor dette giver løsningen?

Dine noter:

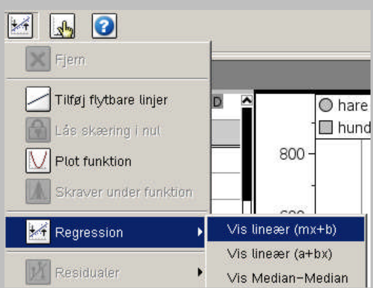
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_Acuendos_Juvenes

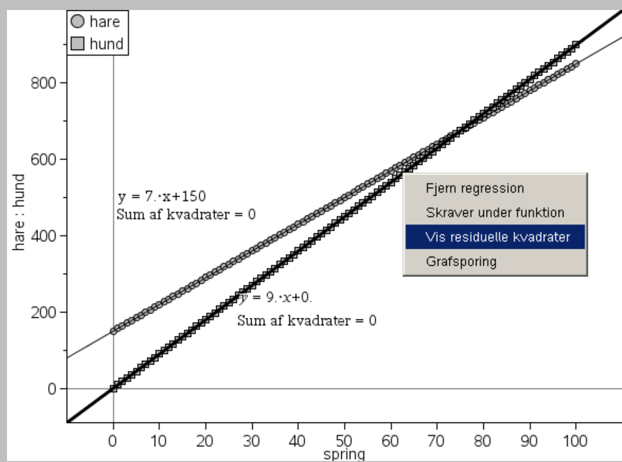
Bemærkning til bestemmelse af de lineære sammenhænge

Vi kan også benytte lineær regression til at bestemme den lineære sammenhæng, der beskriver den distance hunden og haren tilbagelægger som funktion af antallet af spring. De to distancer afhænger altså begge af antal spring som den uafhængig variabel. Udgangspunktet er vores graf med vores punkter:

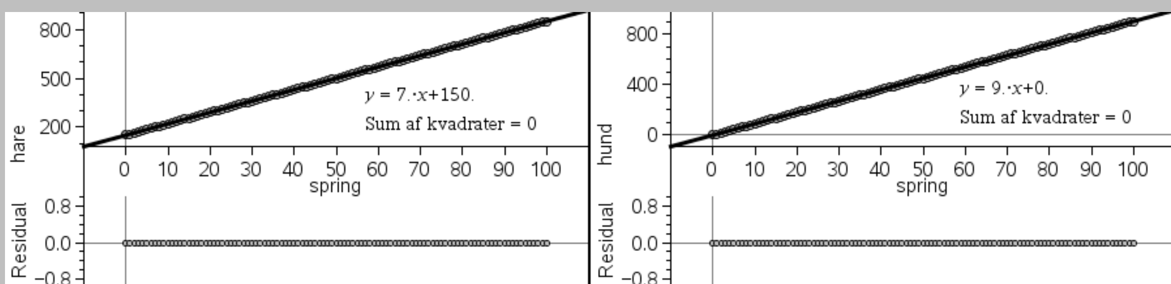


I **Data og Statistik** applikationen tegnes graferne for de lineære sammenhænge, der bedst beskriver tabellens data ved at vælge menupunktet **Vis lineær (mx+b)** i menuen **Regressioner** under **Analyser**. Højreklik på hver af de to grafer og vælg **Vis residuelle kvadrater**:

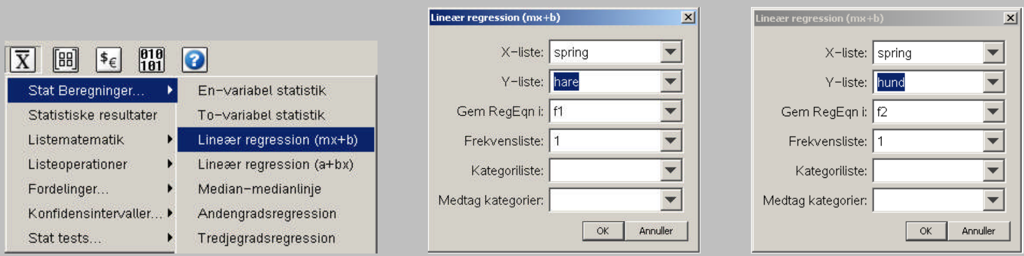


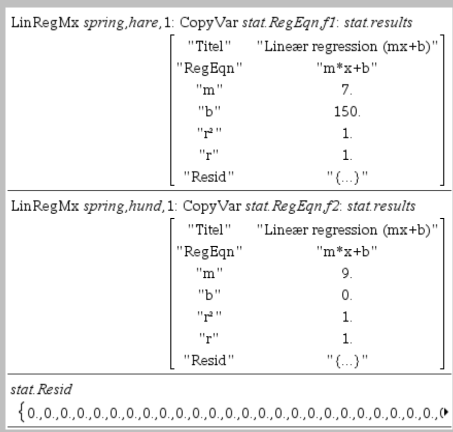


Vi ser da, at vi får sammenhængene foræret. Sammenhængene er ikke overraskende helt "perfekte", da sum af kvadrater er 0. Tilføjer vi **Residualplot**, ser vi at residualerne alle er 0. Her er det tydeliggjort ved at tegne de to grafer hver for sig:



I en **Grafregner** applikation gentager vi nu vores analyser af de lineære regressioner for at undersøge dem nærmere:





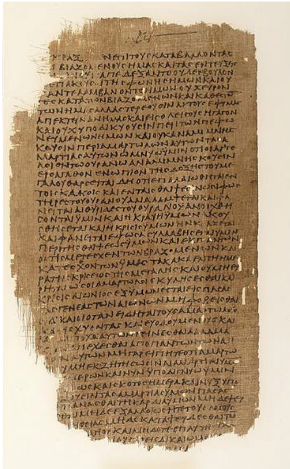
Vi ser at forklaringsgraden for vores lineære regressioner begge er 100%. Dette understøttes af at residualerne alle er 0.

Sammenhængene er dermed bestemt ved hjælp af lineær regression og givet som hhv. $y = 7 \cdot x + 150$ og $y = 9 \cdot x$.

Det første møde med uendelighed[4]

Dette bliver dit første møde med uendelighed, idet vi undersøger et at de tidligst dokumenterede møder med uendelighed.

Papyrus er fremstillet af planten Cyperus papyrus og er et af verdens ældste skrivematerialer. Papyrus blev udviklet i Egypten ca. 4.000 år før vor tidsregning, og blev en af datidens største eksportartikler for Egypten, kun overgået af tekstileksporten, og fik en kolossal indflydelse på Egyptens udvikling. Papyrus blev fremstillet under statsmonopol, og fremstillingsmetoden forblev en velbevaret hemmelighed.



Papyrus Cester Beatty

Så hemmelig, at opskriften på papyrus end ikke blev nedskrevet, men videregivet mundtligt fra generation til generation af producenterne. Planten blev betragtet som hellig. Dens blomst symboliserede solen, mens den trekantede stilk symboliserede det egyptiske tegn for uendelighed. Planten indgik i ritualerne ved tilbedelsen af de egyptiske guder. Guden Ra, vises ofte med blomsten fra Cyperus papyrus.

Men det var som skrivemateriale, planten fik den største betydning. Dels som en enorm indtægtskilde via en stor eksport, og dels fordi den gav egypterne en helt ny og mere håndterlig måde at opbevare sine informationer og sin viden på. På papyrus samlede og opbevarede man viden om religion, filosofi, litteratur, videnskab, kunst, medicin, historie og matematik.

Indtil det lykkedes forskerne at tyde de babylonske lertavler, var overleveringer fra Egypten den rigeste kilde til vores viden om matematik i oldtiden. Den papyrus, som har givet os mest kendskab til matematikken i det gamle Egypten er den såkaldte Rhind-papyrus. Typisk bliver denne papyrus tidsfæstet til ca. 1650 f. Kr.

Papyrus Rhind

Egypterne havde blandt andet en interessant metode til multiplikation og division, og denne metode baserer sig faktisk på de samme principper, som bruges i moderne computere. Denne metode bygger på en udvikling af hele tal i totalssystemet. Rhind-papyrussen giver os også information om egypternes brug af stambrøker. En stambrøk er en brøk, som har tallet 1 som tæller (over brøkstregen).

I lighed med vort moderne talsystem havde også egypterne et veludviklet titalsystem (grunden til, at ti blev valgt som grundtal, var at man også dengang talte på fingrene). Mens vort talsystem er et positionssystem, hvor cifrenes placering har betydning, var egypternes talsystem et såkaldt additivt talsystem, der havde symboler for 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 og 1 000 000. Når de skulle skrive et tal, skrev de symbolerne ved siden af hinanden og adderede dem på samme måde, som man kender fra det romerske talsystem.

[4] Det indledende afsnit er klippet fra Wikipedia: http://da.wikipedia.org/wiki/Matematikkens_historie

En anden kilde til viden om de gamle egypteres matematik er den såkaldte Moskva-papyrus; af denne fremgår det, at egypternes kundskaber i matematik gik meget længere, end Rhind-papyrussen antyder. Papyrussen indeholder 25 matematiske problemer, som blandt andet viser, at egypterne må have kendt til formlen for en pyramides rumfang. Et af problemerne viser yderligere, at de også må have kendskab til formlen for rumfanget af en pyramidestub.

Horus øje

Horus' øje er et gammelt egyptisk symbol - ofte i form af en amulet - for helbred, sundhed og kontinuitet. Symbolet knytter sig til en gammel myte om to de stridende guder, Horus og Seth, der bl.a. er fortalt i Papyrus Cester Beatty (ca. 1150 f.kr.).

Baggrunden for historien er mordet på Osiris. Den retfærdige gud er blevet myrdet af sin bror, Seth, og må nu i al evighed opholde sig i underverdenen. I mellemtiden må de øvrige guder forsøge at få det hele til at fungere på jorden.

Der skal findes en ny arvtager til Osiris' trone, men hvem skal man vælge? Horus er Osiris' søn, men Seth er hans bror, og som han selv siger, ældre og mere erfaren. Af teksten i den nævnte Papyrus fremgår det, at guderne har diskuteret sagen i 80 år uden at nå en afgørelse.[5]

I den ægyptiske mytologi blev Horus øje såret, vredet ud eller spist af den frygtindgydende gud Seth. Senere blev det, ifølge den magiske trylleformular nr. 17 i den ægyptiske dødebog, ført tilbage og helet af den ibis-hovede gud Thoth. Thoth, som skabte matematikken, gjorde det med sine fingre.

Man har diskuteret om denne vending refererer til at 'tælle med fingrene', og om myten på en eller anden made kan sættes i forbindelse med Horus brøkerne (halveringsbrøkerne $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ og $\frac{1}{64}$. Disse brøker udgør i moderne terminologi, en eksponentiel aftagende talfølge med seks led, hvor det første led netop er den konstante faktor.

Udjat betyder det, som er helbredt, og blev det det almindelige symbol på alt, der heler og skaber kontinuitet. Øjet er dermed et godt tegn; som amulet beskytter det mod "det onde øje" og mod uheld og giver desuden kraft og frugtbarhed. I det Nye Rige dekoreredes ligkister med øjet ("magiske øjne").

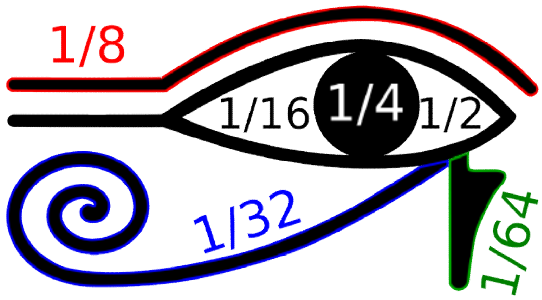
Hekatten var den almindelige rumfangsenhed når man skulle måle korn eller mel. Det svarede til ca. 4.8 liter eller lidt mere end en britisk gallon.

Ved mindre mængder blev hekatten successivt halveret til stambrøkerne 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 og 1/64. Disse kendes som brøkerne fra Horus-øjet, fordi de blev skrevet med tegn, der mindede om de enkelte dele af øjet på guden Horus med falkehovedet, også kendt som wedjat-øjet.

---

5 http://74.125.77.132/search?q=cache:B11cgRyvB28J:www.daes.dk/horus.html+horus+%C3%B8je&cd=12&hl=da&ct=clnk

Grænser for kognition: At begrebsliggøre det ubegribelige... Uendelighed!?
Tværfagligt forløb for 1.x 2010 med matematik, dansk og religion



Flere hieroglyffer indgår i tegningen af "øjet" og øjet består af seks dele, der hver repræsenterer en brøkdel.

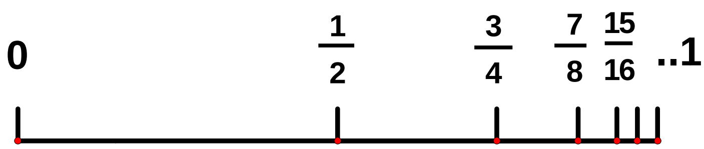
Opgave nr. 79 i Rhind Papyrussen gør det klart, at ægypterne godt kunne udregne summen af brøkerne, som er 63/64. De kunne også have fundet ud af at den manglende del op til helheden 1 netop er 1/64.

Hvis Horus - Seth - Thoth historien også har en matematisk betydning, kunne det altså netop være, at det ødelagte Horus-øje blev helet på magisk vis ved at tilføje den manglende brøkdel 1/64.

I en **Grafregner** applikation i TI-Nspire udregner vi summen af flere og flere af stambrøkerne der indgår i Horus øje:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$	$\frac{31}{32}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$	$\frac{63}{64}$

Grafisk får vi følgende tallinje til at illustrere ovenstående summer:



Hvis vi har et stykke med størrelsen 1 og halverer det, vil der være halvdelen tilbage (what a surprise!), dvs.

$$1 = \tfrac{1}{2} + \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

Her er resten netop den indrammede brøkdel. Halverer vi nu resten vil der være $\frac{1}{4}$ tilbage:

$$1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \boxed{\tfrac{1}{4}}$$

Halverer vi igen resten vil der denne gang være $\frac{1}{8}$ tilbage:

$$1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \boxed{\tfrac{1}{8}}$$

Og for Horus øje får vi:

$$1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \boxed{\tfrac{1}{64}}$$

Hver af stambrøkerne i Horus øje bestod som sagt af brøker dannet af toer potenser:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1},\quad \frac{1}{4}=\frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{8}=\frac{1}{2^3},\quad \frac{1}{16}=\frac{1}{2^4},\quad \frac{1}{32}=\frac{1}{2^5} \text{ og } \frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}$$

Havde Horus øje bestået af endnu flere dele med flere brøker ville det derfor være oplagt at gætte på at de næste brøker ville være:

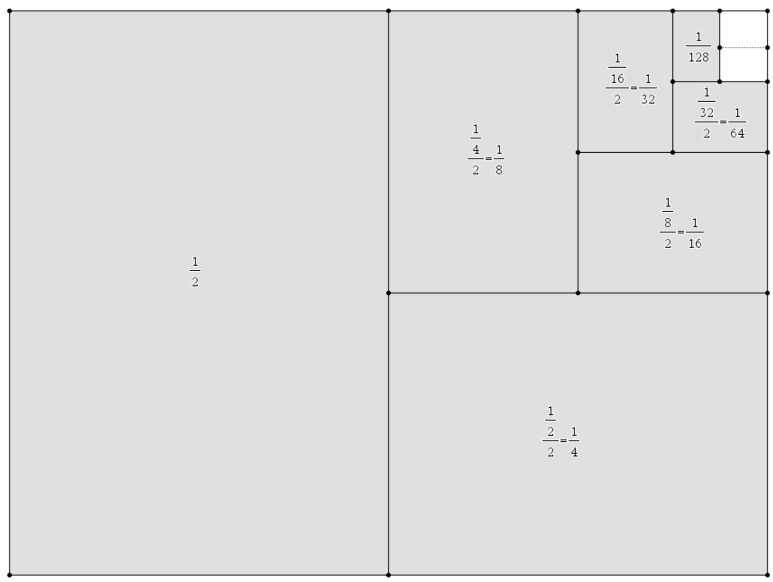
$$\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128},\quad \frac{1}{2^8}=\frac{1}{254},\quad \frac{1}{2^9}=\frac{1}{512},\ldots$$

Efterhånden som vi lægger flere og flere af disse stambrøker til Horus øje vil vi danne en sum der er tættere og tættere på værdien 1. Man kunne endda vove den påstand at man kunne komme vilkårlig tæt på værdien 1.

Føler du dig ikke overbevist kan du helt Jørgen Clevinsk med papir og saks følge nedenstående øvelse:

1) Fold et stykke papir på midten og del papiret i to lige store dele. Skriv ½ på den ene af dine to stykker papir og læg det til side.
2) Fold herefter det resterende halve stykke papir på midten (det du ikke har skrevet på) og del dette papir i to dele. Du har nu halveret en halvdel af det oprindelige hele stykke papir hvorfor du på det ene af dine to nye stykker kan skrive:
$$\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$
3) Læg den fjerdel til side du har skrevet på sammen med den første halvdel. Den anden ¼ halveres og du kan på den ene af de to stykker papir skrive:
$$\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{4\cdot 2}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$
4) Fortsæt indtil så længe du kan skrive brøkdelene på den ene af de to halvdele af brøkdelene.

Vi kunne nu klistre vores afklippede dele sammen. Det sammentapede ark danner summen af brøkdele af det oprindelige hele stykke papir og efterhånden som vi klistrer mindre og mindre halvdele af brøkdele sammen vil det sammentapede ark efterhånden ligne det oprindelige ark mere og mere. Det sammentapede ark vil dog aldrig blive lige så stort som det oprindelige ark:



Ovenstående proces er **potentiel uendelig**. Vi kan ”kun” gennemføre processen et endelig antal gange. Vi skal ikke halvere stykkerne ret mange gange inden det bliver svært og decideret umuligt at halvere mikroskopiske små stykker. Det er dog ikke svært for os at forestille at processen fortsætter. Vi siger osv. og når det gælder tal tilføjer vi tre prikker for at indikere at mønsteret fortsætter: 2, 4, 8, 16 osv. eller 2, 4, 8, 16, …

Vi skulle nu gerne have indset at summen af brøkerne ½, ¼, 1/8, 1/16, … efterhånden tilnærmer sig 1, altså at der må gælde at:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

Der gælder faktisk den følgende simple bemærkelsesværdige formel:

$$b+b\cdot a^1+b\cdot a^2+b\cdot a^3+\ldots+b\cdot a^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} b\cdot a^n=\frac{b}{1-a}$$

En nødvendig (men desværre ikke tilstrækkelig) betingelse for formlens gyldighed er at leddene der lægges sammen bliver mindre og mindre: $|a|<1$ (summens behandles yderligere i det senere afsnit: ”Generel behandling af Achilleus og skildpadden”).

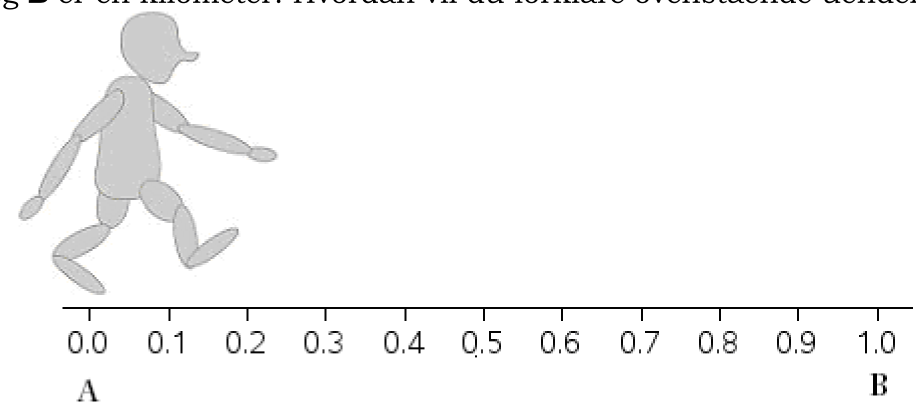
Det giver os det ønskede resultat da $b=\frac{1}{2}$ og $a=\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

TI-Nspire kan rent faktisk udregne disse uendelige summer. Vi finder sumtegnet under **Matematikskabeloner** og uendelighedstegnet under **symboler**:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \qquad 1$$

Forestil dig at du befinder dig på en vejstrækning mellem punkt **A** og **B**. Afstanden mellem **A** og **B** er en kilometer. Hvordan vil du forklare ovenstående uendelige sum?



Dine noter:

Achilleus og skildpadden

Zenos paradokser er en række problemer, der menes at have været udtænkt af Zeno fra Elea til støtte for Parmenides doktrin om at bevægelse ikke er andet end en illusion. Det formodes at Zenos projekt var at skabe disse paradokser, fordi andre filosoffer havde rejst indvendinger mod Parmenides opfattelse.

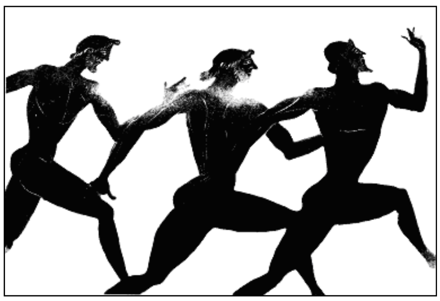
Zenos argumenter er muligvis de første eksempler på en bevismetode kaldet ”reductio ad absurdum” også kendt som ”bevis ved modsigelse” (modstridsbevis).

Flere af Zenos ni overleverede paradokser er i princippet ækvivalente, og de fleste af dem blev betragtet, også i oldtiden, som meget lette at tilbagevise. Tre af de nok kendteste paradokser er: Achilleus og skildpadden, Den gentagne halvering (Dikotomi argumentet) og pilen i sin flugt.

Zenos paradokser skabte dog store problemer for antikke og middelalderlige filosoffer, der ikke var tilfredse med de foreslåede løsninger. Mere moderne matematiske metoder, som udnytter differentialregning har generelt tilfredsstillet matematikere og ingeniører. Dog har udviklingen inden for fysik sat spørgsmålstegn ved tanken om tid, rum og hastighed nogensinde kan bestemmes nøjagtigt.

Der er dog stadigvæk mange filosoffer, der afholder sig fra at sige at paradokserne er helt løst. Det påpeges dog at forsøgene på at løse paradokserne har resulteret i mange intellektuelle erkendelser. Varianter af paradokserne (f.eks. Thomson's lampe som vi ser på senere i materialet) fortsætter med at så tvivl om argumenterne – hvis der i det hele taget er noget galt med dem!

Vi vil nu **med respekt** behandle det nok mest berømte af Zenos paradokser om Achilleus og skildpadden. Zeno ønsker at bevise at den fodrappe Achilleus umuligt kan indhente den langsomme skildpadde, hvis blot skildpadden får et lille forspring til at begynde med.



Den fodrappe Achilleus giver skildpadden et forspring i tiltro til hans egen fantastiske evner: Ingen løber hurtigere end den fodrappe Achilleus.

Men det skulle han aldrig have gjort. For hvis Achilleus skal indhente skildpadden må han først tilbagelægge skildpaddens forspring. I mellemtiden er Skildpadden løbet et lille stykke og har derfor et nyt – om end mindre forspring.

Nu må Achilleus derfor først tilbagelægge det nye mindre forspring. Men i mellemtiden er Skildpadden løbet endnu et lille stykke og har derfor skabt sig et nyt – om end endnu mindre forspring. Nu må Achilleus først tilbagelægge det nye endnu mindre forspring osv. osv. Achilleus får derfor aldrig indhentet skildpadden, da han hele tiden skal indhente det nye forspring Skildpadden i mellemtiden har etableret.

Læg mærke til den kognitive fælde: Så længe vi er inde i forestillingen om, at Achilleus lige skal have indhentet det sidste forspring skildpadden har opnået, er vi fanget i uendelighedens fælde: Der er altid et nyt forspring på vej og vi slipper derfor aldrig ud af fælden. Faktisk mangler vi hele tiden et uendeligt antal forspring, som den djævelsk langsommelige skildpadde møjsommeligt formår at stable på benene. Det er ligesom når vi tæller: 1, 2, 3, … . Der er hele tiden et nyt tal og et nyt tal og et nyt tal …, dvs. så længe vi tæller, kan vi aldrig blive færdige – ikke bare er der altid et næste tal, men der er uendeligt mange tal tilbage, som vi endnu ikke har fået talt. Vi bliver derfor aldrig færdige med at tælle – og på samme måde bliver Achilleus aldrig færdig med at indhente skildpaddens møjsommeligt etablerede forspring.

Lad os prøve at undersøge væddeløbet matematisk, idet vi lader skildpadden få et forspring på 10 meter og vi siger at Achilleus løber 10 gange så stærkt som skildpadden. Vi kan nu nemt regne på væddeløbet. Lad os desuden tænke os, at super skildpadden løber 1 meter i sekundet og at Achilleus dermed løber 10 meter i sekundet. Kaldes tiden de har løbet for x og distancen de har tilbagelagt for y får vi:

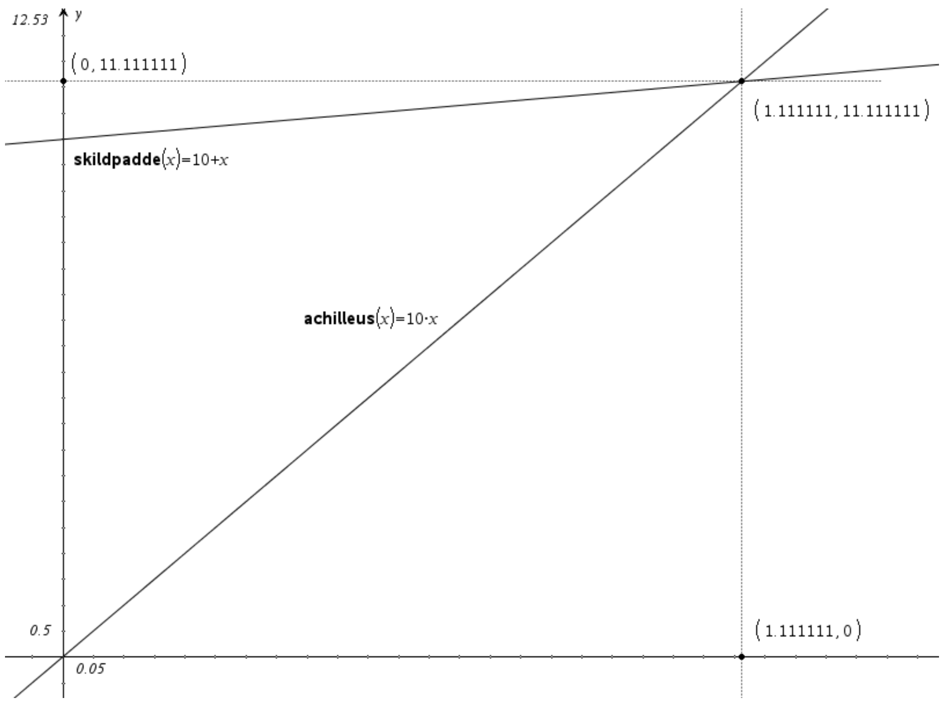
Skildpadden: $y = \text{forspring} + \text{tilbagelagt distance} = 10 + x$
Achilleus: $y = \text{tilbagelagt distance} = 10 \cdot x$

Altså kan vi løse ligningen $10 + x = 10 \cdot x$ for at bestemme det tidspunkt, hvor de har tilbagelagt den samme distance (inklusiv forspring):

$$10 + x = 10 \cdot x \quad \rightarrow \quad 10 = 9 \cdot x \quad \rightarrow \quad \frac{10}{9} = x$$

Det viser at Achilleus overhaler skildpadden efter 10/9 = 1+1/9 sekund, og at det sker efter at have løbet 100/9 = 11+1/9 meter (mens skildpadden kun har løbet 1+1/9 meter). Pyha – det var godt, at vi fik styr på det… hvor svært kan det være!?

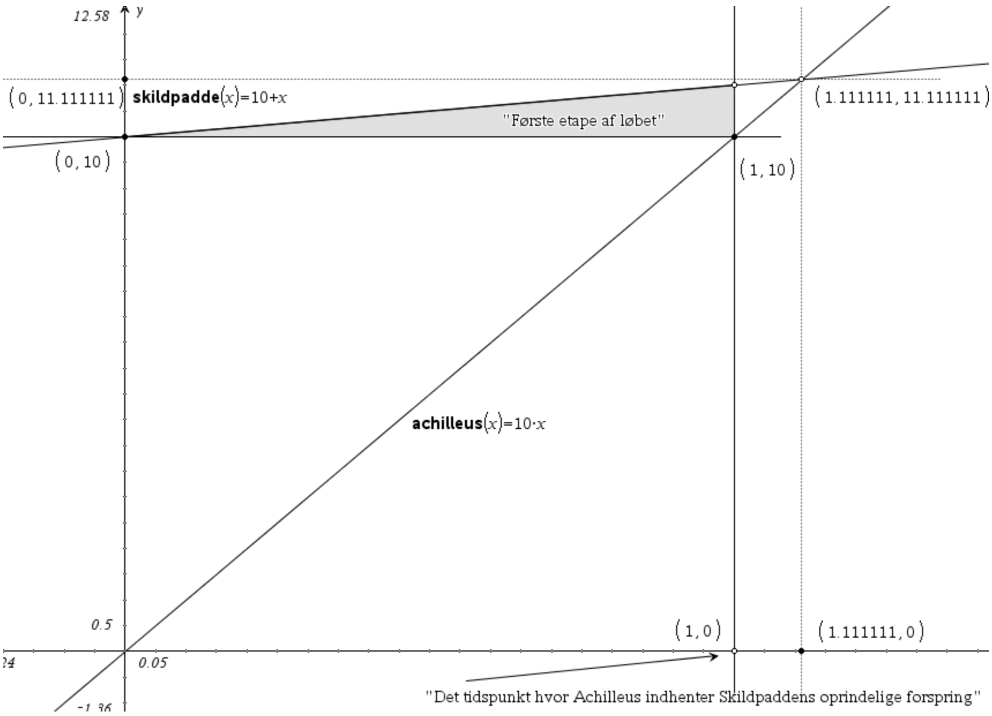
Vi kan nemt illustrere ovenstående eksempel grafisk i et koordinatsystem, idet vi tegner grafen for distancen som Achilleus og Skildpadden (inklusive forspring) tilbagelægger:



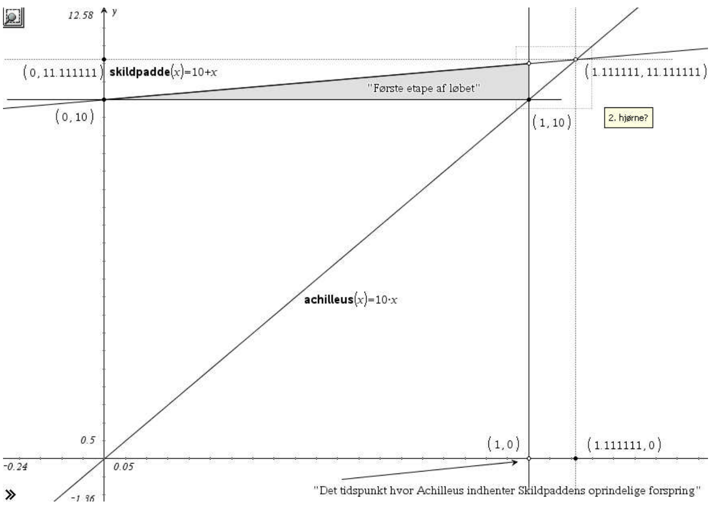
Skæringspunktet for de to grafer giver os det tidspunkt og den distance, hvor Achilleus indhenter Skildpadden, idet vi vælger at få resultatet vist med 6 decimaler.

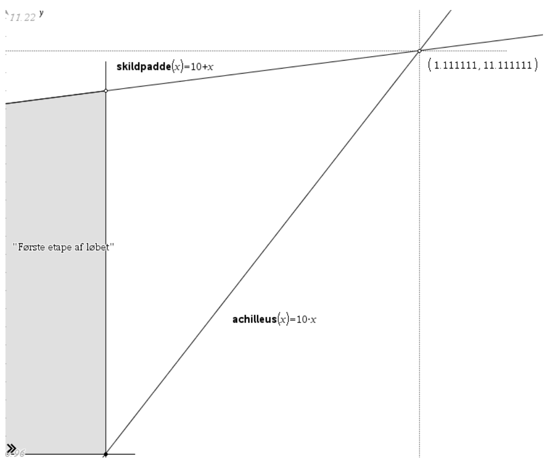
Dette er hvad almindelig sund fornuft siger os (koblet med lidt matematisk indsigt). Men hvad så med Zenos indvending? Zeno deler væddeløbet op i et uendeligt antal etaper.

I første etape skal Achilleus først nå hen til skildpaddens startposition. I mellemtiden er skildpadden nået lidt længere. Grafisk skal vi altså trække en vandret linje fra skildpaddens startposition hen til grafen for Achilleus. Dernæst skal vi trække en lodret linje fra skæringspunktet op til Skildpaddens graf svarende til Skildpaddens nye forspring. Den vandrette og lodrette linje tegnes vha. af menupunktet **Vinkelret** eller **Parallel**:

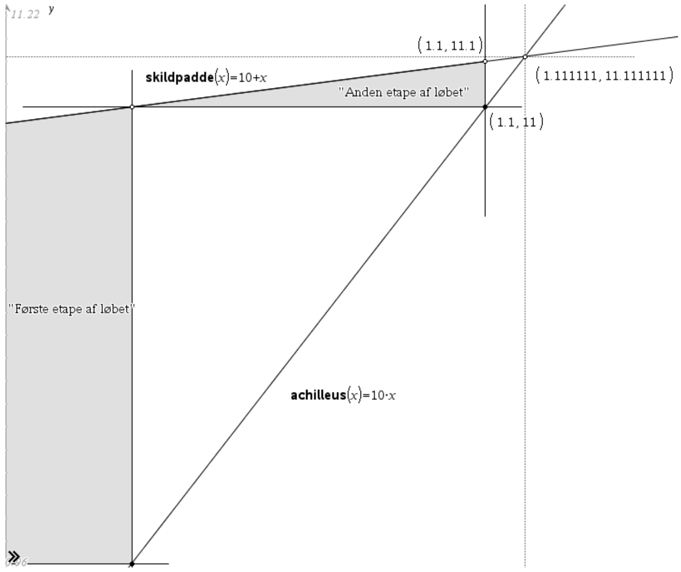


For at illustrere næste etape Zoomer vi ind på det relevante område ved at højreklikke, vælge **Zoom - Felt** og markere de to hjørner der afgrænser feltet:

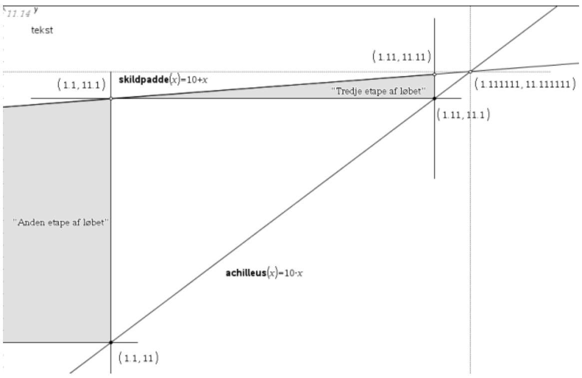


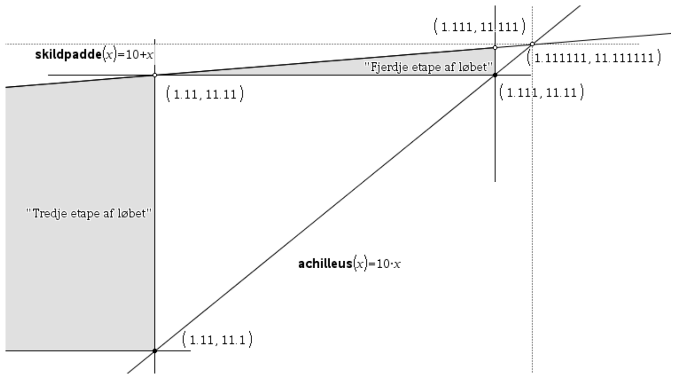


I næste etape skal Achilleus så indhente det nye forspring. Dvs. vi skal igen trække en vandret linje efterfulgt af en lodret linje svarende til Skildpaddens nye forspring:

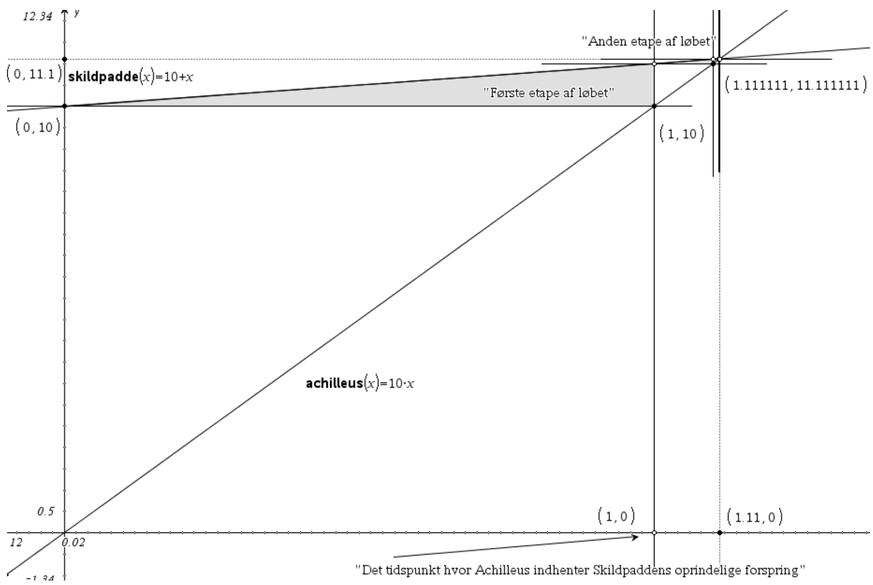


Tredje og fjerde etape konstrueres på tilsvarende måde:





Det er klart, at vi nu kan fortsætte denne potentielt uendelige proces! Men lad os zoome ud og se vores samlede konstruktion:



Skæringspunktet mellem de to grafer, fremstår dermed som grænsen for de uendeligt mange "trappetrin", svarende til de uendeligt mange etaper løbet er blevet delt op i.

Vi kan også nemt regne os gennem de enkelte etaper. I den første etape skal Achilleus tilbagelægge 10 meter. Det tager Achilleus 1 sekund. Imellem tiden når Skildpadden 10 gange så kort, dvs. 1 meter.

I den anden etape skal Achilleus kun tilbagelægge 1 meter. Det tager Achilleus 1/10 sekund. I mellemtiden når Skildpadden 10 gange så kort, dvs. denne gang 1/10 meter.

Og sådan fortsætter det, idet hvert nyt forspring er en tiendedel af det forrige og tager ti gange så kort tid at gennemløbe. Alt i alt skal Achilleus derfor gennemløbe *strækningen*:

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots=10+10\cdot\frac{1}{10}+10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3+\ldots$$

Vi kan også udtrykke det i decimaler således:

$$10\ +\ 1\ +\ 0.1\ +\ 0.01\ +\ 0.001\ +\ \ldots\ =\ 11.1111\ldots=\frac{100}{9}$$

Achilleus indhenter altså skildpadden efter at have løbet 100/9 = 11.1111... meter.

Den *tid* Achilleus bruger på at indhente Skildpadden er tilsvarende:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots=1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\ldots$$

eller i decimaler:

$$1\ +\ 0.1\ +\ 0.01\ +\ 0.001\ +\ \ldots\ =\ 1.1111\ldots=\frac{10}{9}$$

Achilleus indhenter altså skildpadden efter at have løbet i 10/9 = 1.1111... sekunder. Lad os for et øjeblik holde fast i Zenos paradoks hvor det jo ikke var muligt for Achilleus at indhente Skildpadden da han skal gennemløbe uendeligt mange etaper. Hvordan var det egentlig det lykkes for os at løse opgaven og slippe fri af den kognitive fælde?

Her benytter vi os af **den grundlæggende metafor for uendelighed**: Når der foreligger en gentagen proces, kan vi forestille os den afsluttet på 'den yderste dag', dvs. i ét hug forestille os at alle de uendeligt mange gentagne delprocesser er overstået og vi kan begynde på en frisk.

I den ovenstående undersøgelse har vi f.eks. en trappe med stadig mindre trin, der snævrer sig ind mod skæringspunktet. Så når vi forestiller os at vi har besteget alle de uendeligt mange trappetrin, så er vi netop ankommet til skæringspunktet. Som vi så tidligere gælder der den simple formel som vi kan udnytte:

$$b+b\cdot a^1+b\cdot a^2+b\cdot a^3+\ldots+b\cdot a^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}b\cdot a^n=\frac{b}{1-a}$$

Ovenstående formel anvendte vi ret faktisk to gange til indirekte at bestemme hhv. *tidspunktet* hvor Achilleus indhentede Skildpadden med $b=1$ og $a=1/10$:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots=1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}1\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$$

Og *strækningen* Achilleus gennemløber med $b=10$ og $a=\dfrac{1}{10}$:

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots=10+10\cdot\frac{1}{10}+10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{10}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{9}$$

Som vi så tidligere kan TI-Nspire CAS nemt udregne disse uendelige summer. Vi finder sumtegnet under **Matematikskabeloner** og uendelighedstegnet under **symboler**:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \qquad \frac{10}{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \qquad \frac{100}{9}$$

Læg også mærke til, at vores undersøgelse både omfatter rum og tid:

Achilleus indhenter skildpadden i løbet af en endelig distance, fordi summen af alle de lodrette stykker i trappetrinene er endelig (de lodrette linjestykker bliver mindre og mindre – hvilket ikke er tilstrækkeligt, men nødvendigt for at summen kan blive endelig).

Achilles indhenter også skildpadden i løbet af en endelig tid, fordi summen af alle de vandrette linjestykker i trappetrinene er endelig (de vandrette linjestykker bliver mindre og mindre – hvilket ikke er tilstrækkeligt, men nødvendigt for at summen kan blive endelig).

Specielt ser vi at den kognitive fælde **ikke** handler om at vi aldrig kan slippe ud, fordi en uendelig proces må tage uendelig tid. Ligesom et linjestykke kan opdeles i uendeligt mange delstykker, hvis vi f.eks. successivt halverer linjestykket, på samme måde kan et tidsrum opdeles i uendeligt mange deltidsrum, hvis vi f.eks. successivt halverer tidsrummene. Vi slipper ikke ud af fælden, så længe vi befinder os inde i fælden, fordi vi 'hele tiden' mangler at udføre uendeligt mange handlinger.

Mens det i dag er nogenlunde nemt at forestille sig at en uendelig sum af stadig mindre strækninger godt kan være endelig, er det stadigvæk sværere at forestille sig det tilsvarende om tidsrum. Så intuitivt vil mange føle, at man ikke kan gennemløbe uendeligt mange etaper i et endeligt tidsrum. Men tid opfører sig ligesom rum, så også en uendelig sum af stadigt mindre tidsrum kan godt gå hen og være endelig. Og så har vi endda udviklet en sumformel som tillader os at finde den præcise værdi af en sådan uendelig sum og dermed at beregne det præcise tidspunkt såvel som det præcise sted, hvor Achilleus indhenter skildpadden i zenos formulering af løbet, hvor det er opdelt i uendeligt mange etaper.

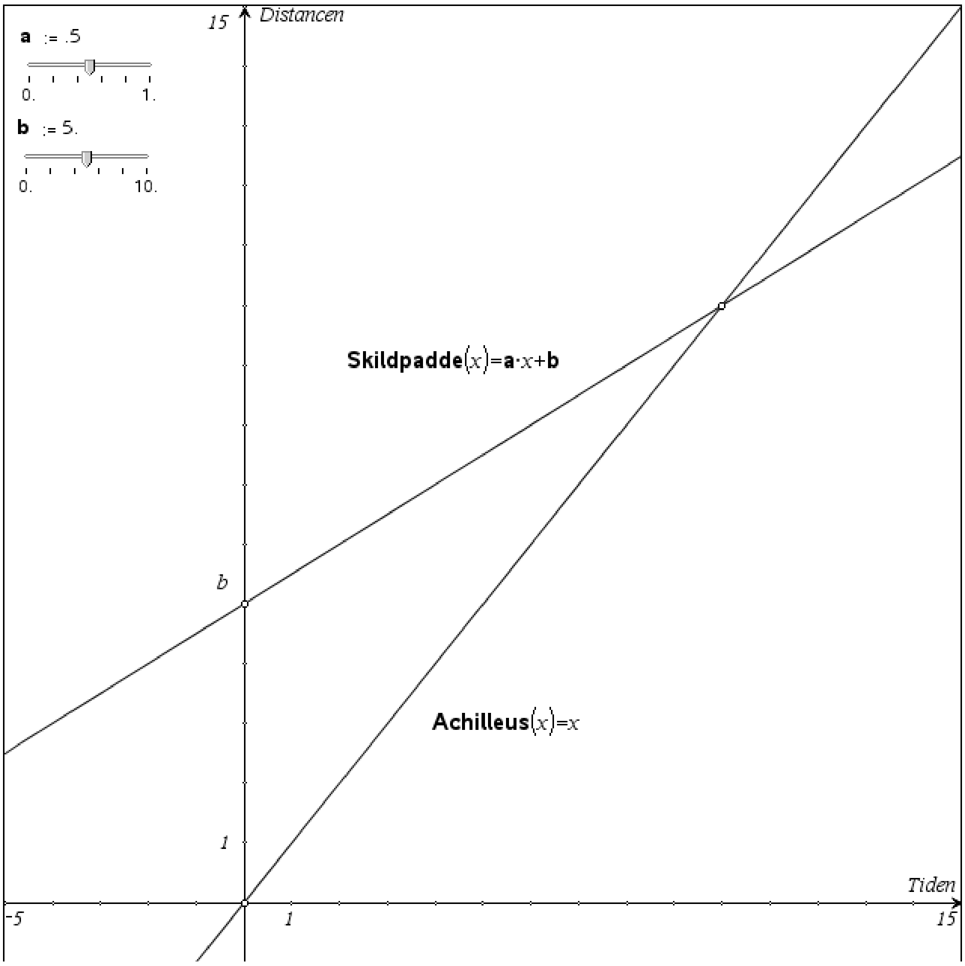
Men vi har også set at man ved at løse en simpel ligning kan finde ud af dette uden at jonglere med uendeligheder. Man kan altså komme helt uden om paradokset ved hjælp af sin sunde fornuft. Helt så nemt går det dog ikke altid!

Generel behandling af Achilleus og skildpadden

Som ovenfor bruger vi en moderne repræsentationsform til at fortolke, hvad der sker undervejs i væddeløbet, idet vi igen afbilleder tiden ud af førsteaksen og positionen op af andenaksen i et koordinatsystem. Vi indfører denne gang de følgende betegnelser:

Achilleus giver skildpadden et forspring på stykket ***b***. Achilleus løber med hastigheden ***1*** (vi kan altid afstemme vores enheder for længde og tid, så Achilleus netop løber 1 længdeenhed i løbet af 1 tidsenhed). Den langsomme skildpadde løber med hastigheden ***a***, hvor ***a*** selvfølgelig er mindre end 1.

Da Achilleus starter fra positionen $y = 0$ til tiden $x = 0$ følger han derfor bevægelsesligningen $y = x$. Da skildpadden starter fra positionen $y = b$ til tiden $x = 0$ og da skildpadden bevæger sig med hastigheden a følger den bevægelsesligningen $y = a \cdot x + b$. Der hvor de to linjer skærer hinanden, indhenter Achilleus netop skildpadden og farer triumferende forbi:



Vi kan endda nemt finde ud af hvor Achilleus indhenter skildpadden ved at sætte de to ligninger lig med hinanden og gå frem på sædvanlig vis:

Vi skal løse ligningen $x=a\cdot x+b$. Vi trækker derfor $a\cdot x$ fra på begge sider:

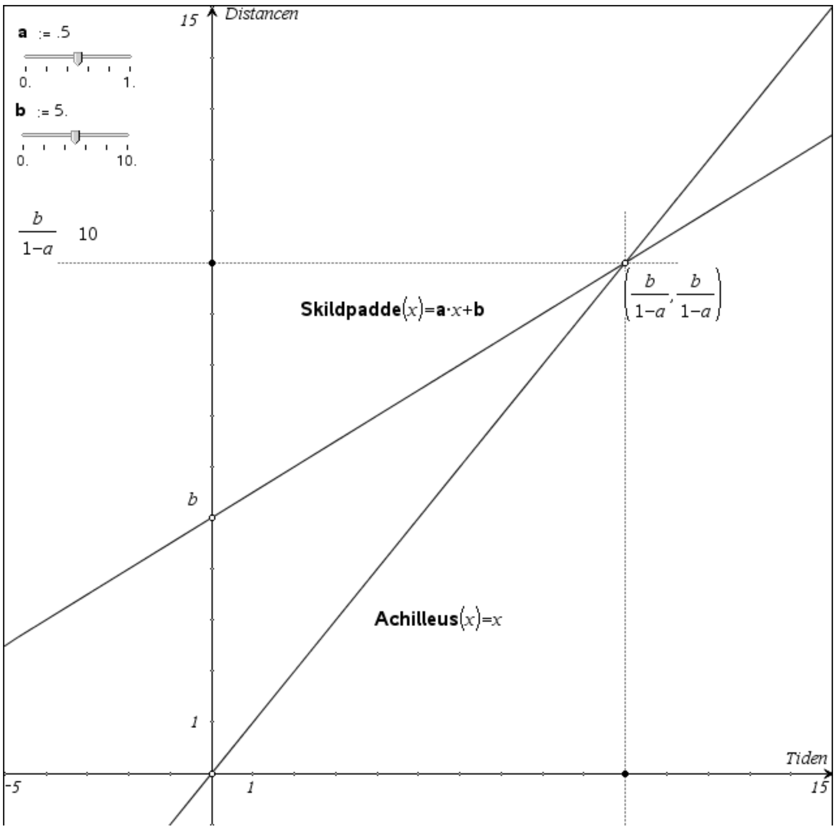
$$(x=a\cdot x+b)-a\cdot x \quad \rightarrow \quad (1-a)\cdot x=b$$

Derefter dividerer vi med $1-a$ på begge sider:

$$\frac{(1-a)\cdot x=b}{1-a} \quad \rightarrow \quad x=\frac{b}{1-a}$$

Achilleus indhenter derfor skildpadden til tiden $\frac{b}{1-a}$.

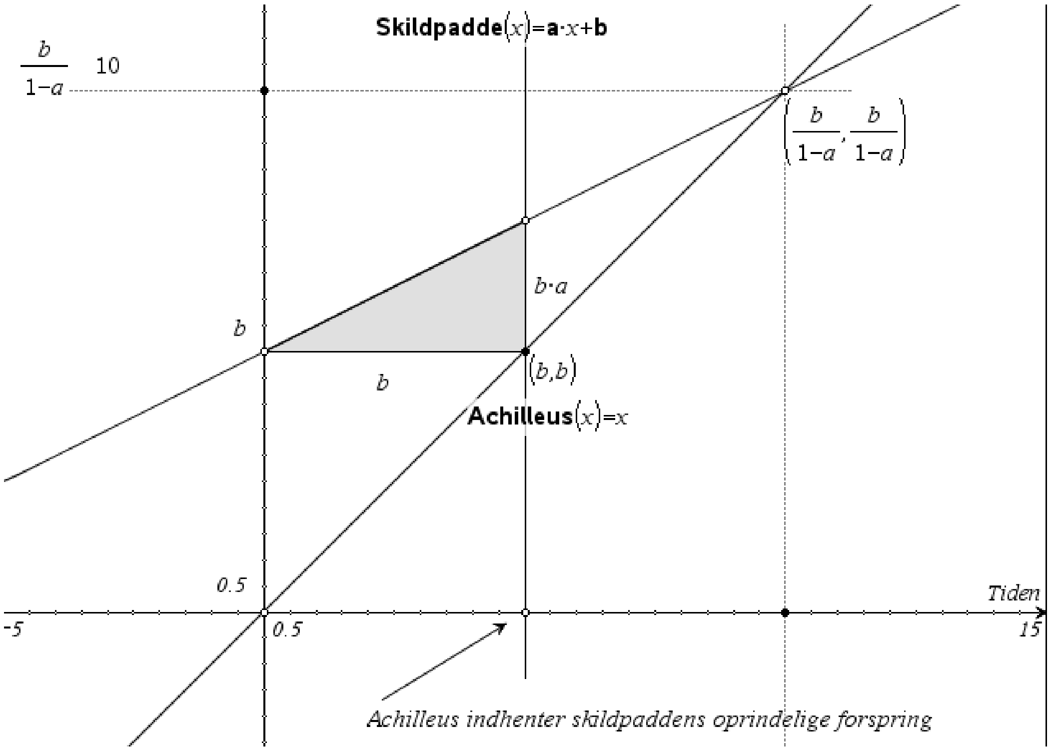
Vi kan teste løsningen grafisk ved at udregne $\frac{b}{1-a}$ og overføre værdien til begge akserne:



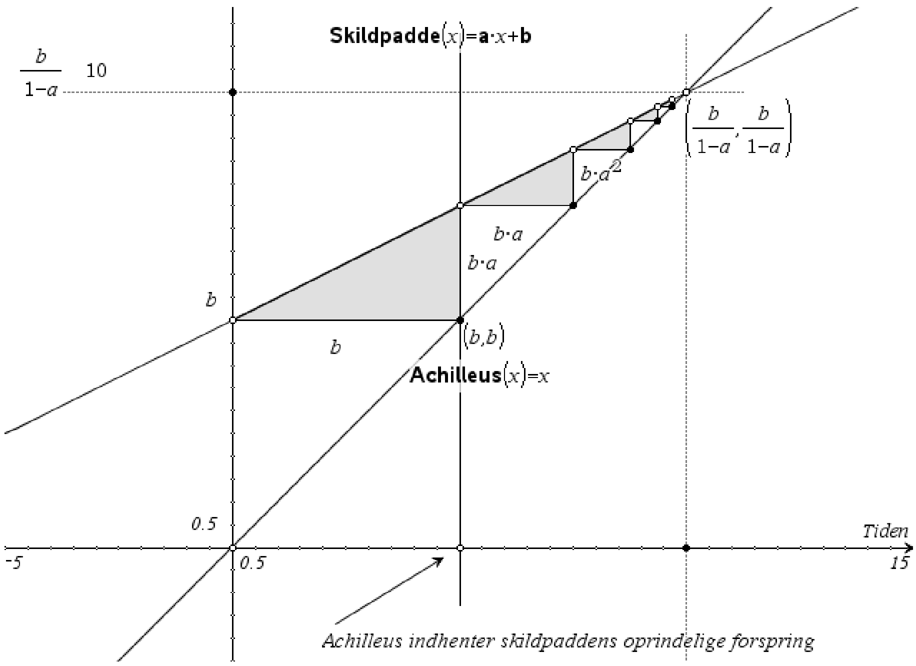
Vi kan også forstå formlen ud fra opgaven med hunden og haren: I hver tidsenhed løber Achilleus 1 længdeenhed, mens skildpadden kun løber a længdeenheder. Altså rykker Achilleus $1 - a$ længdeenheder nærmere. Da det oprindelige forspring var b, så fortæller brøken $\frac{b}{1-a}$ os netop hvor mange gange det tager før forspringet er spist op og dermed hvor mange tidsenheder, der går før skildpadden er indhentet.

I det ovenstående eksempel er a fx 0.5, dvs. skildpadden bevæger sig 0.5 længdeenhed i hver tidsenhed. Men det betyder så at Achilleus skærer 1 – 0.5 = 0.5 af forspringet i hver tidsenhed. Da det oprindelige forspring i dette eksempel er 5 tager det altså Achilleus 5/0.5 = 10 tidsenheder at indhente skildpadden.

Men hvad nu med Zenons paradoks? Ifølge Zenons paradoks skal Achilleus først tilbagelægge det oprindelige forspring *b*. Vi tegner derfor en vandret linje ud fra startpunktet *b*. Men i mellemtiden har skildpadden etableret et nyt forspring som har størrelsen $b \cdot a$ (fordi linjen har hældningskoefficienten *a*, dvs. når vi rykker stykket 1 hen, rykker vi samtidigt stykket *a* op, og dermed: når vi rykker stykket *b* hen – som jo er *b* gange så stort som stykket 1 - rykker vi samtidigt stykket $b \cdot a$ op):



Men så må Achilleus jo på den igen og igen og igen …



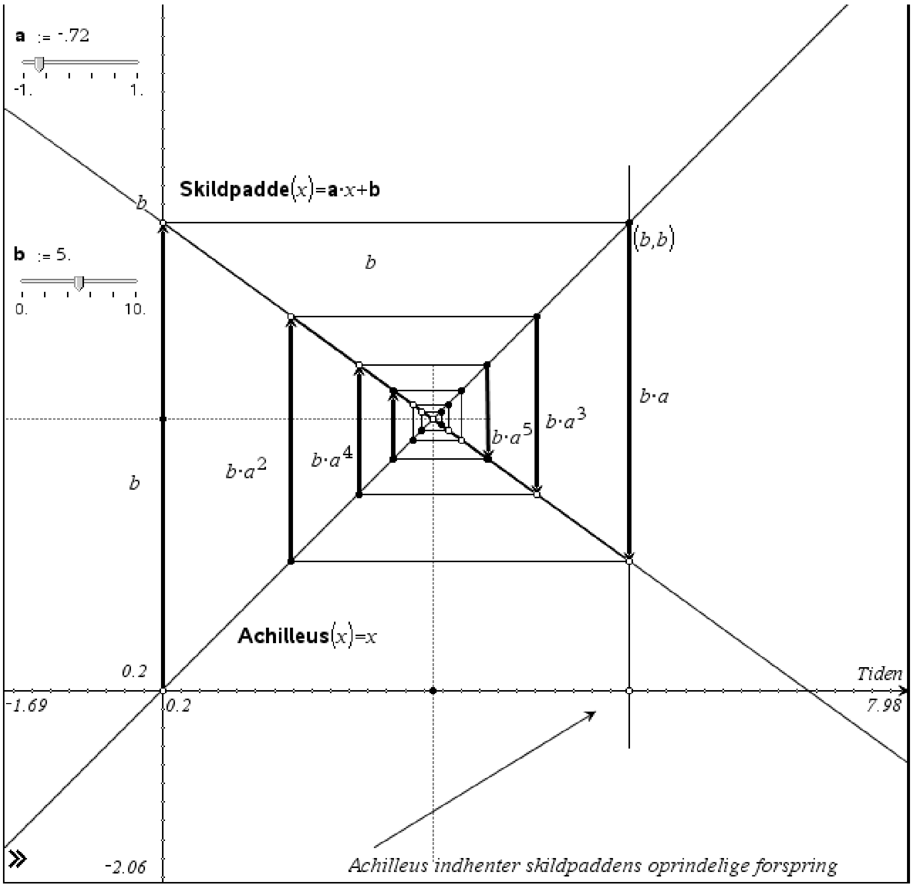
Så først må Achilleus tilbagelægge det oprindelige forspring *b*, så må han tilbagelægge det næste forspring $b \cdot a$, så må han tilbagelægge det næste forspring $b \cdot a^2$ osv. osv. Alt i alt må Achilleus altså tilbagelægge den uendelige sum:

$$b + b \cdot a^1 + b \cdot a^2 + b \cdot a^3 + \ldots + b \cdot a^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} b \cdot a^n = \frac{b}{1-a}$$

hvor venstresiden er summen af alle de lodrette linjestykker, mens højresnetop iden er skæringspunktets lodrette højde over *x*-aksen.

Denne sum behandlede og diskuterede vi i det tidligere afsnit. Vi vil nu behandle formlens "rækkevidde" idet vi undersøger dens gyldighed i andre situationer.

Hvad nu hvis skildpadden er forvirret og løber den modsatte vej, dvs. løber Achilleus i møde? I så fald er skildpaddens hastighed a altså negativ (men ligger stadigvæk mellem -1 og 0):



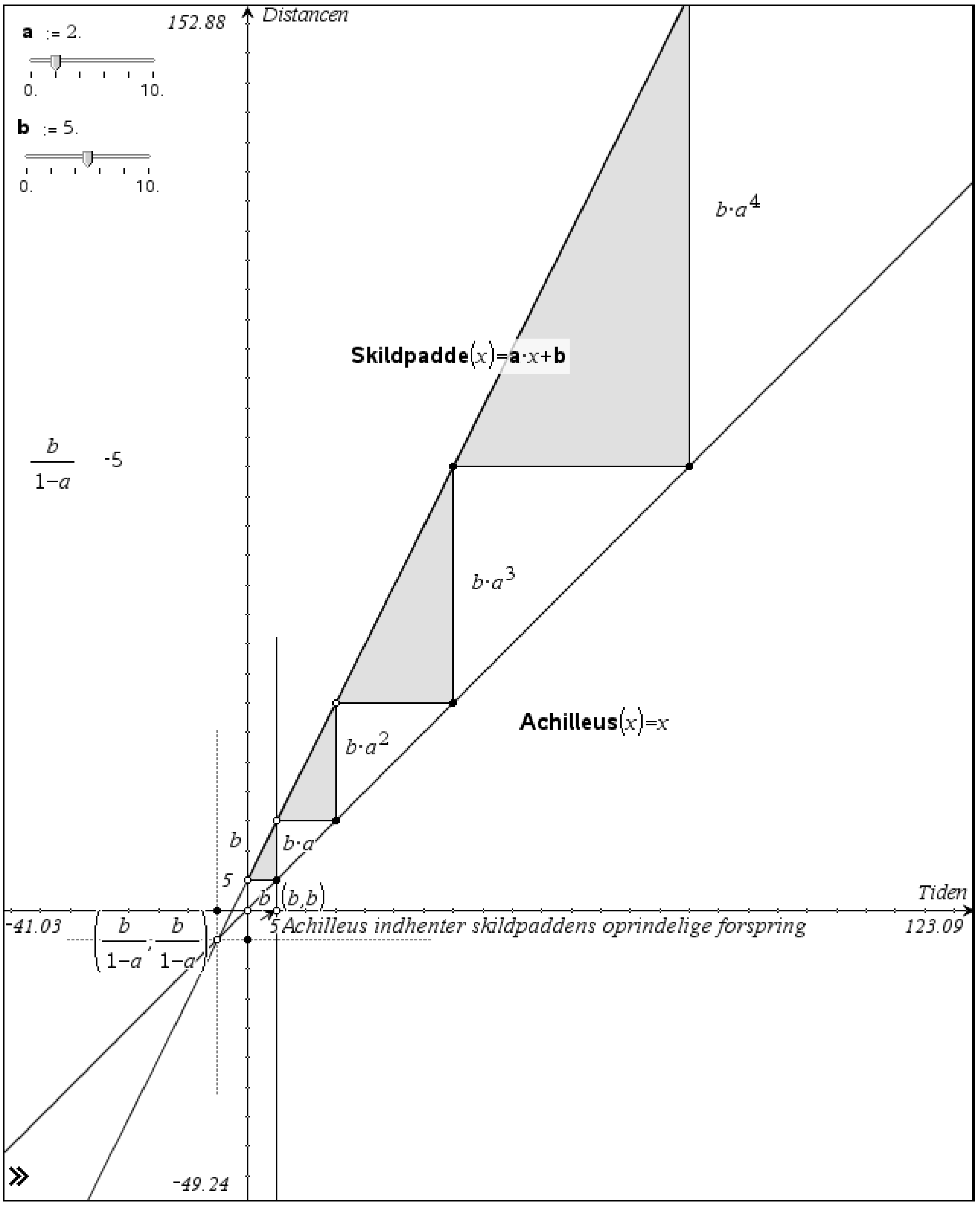
Denne gang får vi så en trappe, hvor hvert andet trin går opad og hvert andet trin går nedad. Zenons historie bryder selvfølgelig sammen for Achilleus passerer skildpadden på vej ud til startpunktet for skildpadden. Den grafiske repræsentation står derfor ikke længere for væddeløbet opdelt i sine mange faser, men repræsenterer i stedet blot at mødestedet stadigvæk kan opfattes som en sum af uendeligt mange bidrag, hvor hvert andet bidrag er positivt og hvert andet bidrag er negativt. Vi spoler skiftevis filmen fremad og tilbage, fordi Achilleus hele tiden løber for langt i sin iver efter at nå frem til det sted, hvor skildpadden sidst blev set.

Formlen gælder derfor stadigvæk – men nu altså også for negative værdier af *a*:

$$b + b \cdot a^1 + b \cdot a^2 + b \cdot a^3 + \ldots + b \cdot a^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} b \cdot a^n = \frac{b}{1-a}$$

Men hvad nu hvis skildpadden er en superskildpadde og kan sætte farten op, så han i stedet kan løbe fra Achilleus?

Hvordan skal vi så tolke den grafiske repræsentation og formlen for den uendelige proces?



Trappetrinene bliver større og større denne gang og Achilleus synes virkeligt at være fanget i fælden denne gang og kan ikke slippe ud: Jo længere tid, der går jo mere bagud kommer han! Alligevel skærer de to grafer hinanden i et punkt med negative koordinater! Hvordan skal det nu forstås?

Jo, vi skal tage bevægelsesgraferne alvorligt og forestille os at løbet foregår med flyvende start! Altså har Achilleus og skildpadden løbet og løbet siden begyndelsesløs tid og til tiden $t = 0$ passerer Achilleus netop startstregen i $y = 0$, mens skildpadden allerede er fremme ved forspringstregen i $y = b$. Men da skildpadden løber hurtigst betyder det jo, at skildpadden passerede Achilleus *før* de kom til startstregen og dermed *før* tidspunktet $t = 0$. Heraf kommer de to negative værdier!

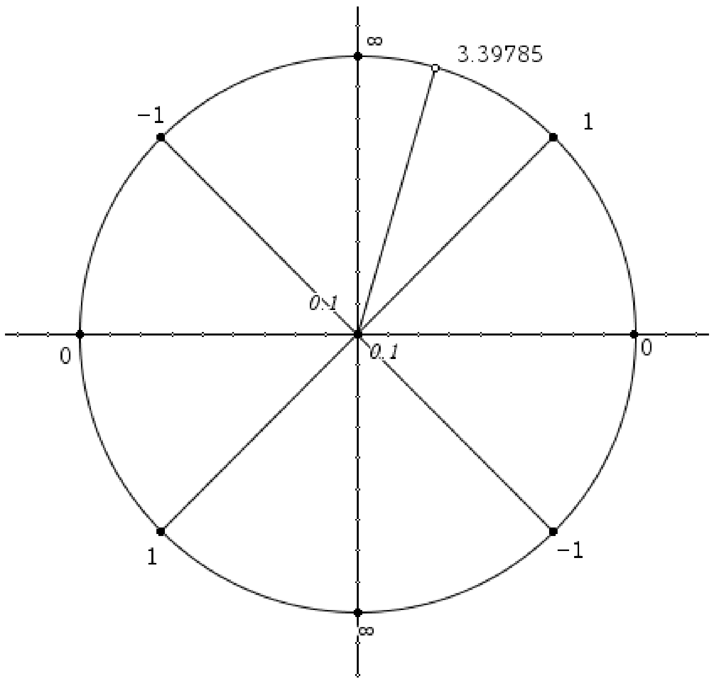
Men gælder formlen

$$b+b\cdot a^1+b\cdot a^2+b\cdot a^3+\ldots+b\cdot a^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}b\cdot a^n=\frac{b}{1-a}$$

så stadigvæk? Summen består af lutter positive led, hvor de enkelte led bliver større og større, mens højresiden $\frac{b}{1-a}$ er et negativt tal fordi a er større end 1!

Det er omstridt! I moderne matematik har man skiftet synspunkt flere gange: Euler fastholdt formlens gyldighed, men så kom den i miskredit, hvorefter den igen kom til ære og værdighed med den såkaldte komplekse analyse (som vi ikke her skal se nærmere på). Vi skal ikke her se nærmere på Eulers tekst. Så i stedet nøjes vi med nogle bemærkninger af mere kognitiv art:

Læg mærke til at tallet a repræsenterer hældningen af linjen (der repræsenterer bevægelsen for skildpadden). Når vi ændrer på a drejer linjen. Det vil altså være nærtliggende i stedet at afbilde a på en cirkel, hvor en vandret linje gennem centrum går gennem 0, mens en lodret linje gennem centrum går gennem ∞, mens alle andre linjer går gennem det tal, der repræsenterer deres hældningstal. Talcirklen består altså af alle de reelle tal, hvor hvert tal optræder *dobbelt* i to modsatte punkter på cirklen:



Men med en sådan form for cyklisk tallinje er det jo ikke så mærkeligt, at når vi vokser op gennem de positive tal og passerer ∞, dukker vi nu op på den negative side og bevæger os gennem de negative tal indtil vi passer 0 og igen rammer de positive tal osv. Så en sum af positive tal kan måske godt skyde forbi uendelig og blive negativ?

Vi kan i hvert fald konstatere følgende:

Bortset fra a = 1 vil Achilleus og skildpadden altid mødes – enten i fremtiden (t positiv) eller i fortiden (t negativ) og mødestedet vil netop være til tiden $\frac{b}{1-a}$ i positionen $\frac{b}{1-a}$.

I tilfældet a = 1 ville vi faktisk også kunne sige, at de mødes i et uendeligt fjernt punkt efter uendelig lang tid.

Hvis skildpadden løber langsommere end Achilleus (0 < a < 1) vil løbet indtil de mødes kunne opfattes som bestående af en uendelig proces, hvor Achilleus hele tiden skal tilbagelægge skildpaddens sidste nye forspring. Men summen af alle de stykker, som Achilleus tilbagelægger, er netop givet ved formlen:

$$b + b \cdot a^1 + b \cdot a^2 + b \cdot a^3 + \ldots + b \cdot a^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} b \cdot a^n = \frac{b}{1-a}$$

Men formlen gælder altså faktisk i en vis forstand for alle værdier af a. Her er et formelt argument:

Kalder vi summen for S kan den omskrives således:

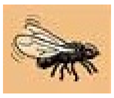
$$S = b + b \cdot a^1 + b \cdot a^2 + b \cdot a^3 + \ldots = b + \left(b + b \cdot a^1 + b \cdot a^2 + b \cdot a^3 + \ldots + b \cdot a^n + \ldots\right) \cdot a = b + S \cdot a$$

Summen opfylder altså ligningen $S = b + S \cdot a$, men den har jo netop løsningen:

$$S = \frac{b}{1-a}$$

To paradoksale øvelser med uendelighed

Den forvirrede flue



En flue fanges ind mellem to uheldige tog, der kører mod hinanden på det samme spor. Fluen rammes af det venstre tog A og begynder straks at flyve til højre mod toget B. Det sker da afstanden mellem de to tog er 10 kilometer. Da fluen når frem til toget B vender den om på en studs og flyver tilbage mod A. Da fluen når frem til toget A vender den igen om på en studs og flyver tilbage mod toget B og så fremdeles indtil de to tog uheldigvis støder sammen og fluen bliver klemt flad.

Antag at begge togene kører med farten 72 kilometer i timen. Fluen – som er en superflue – flyver med farten 108 km i timen.

Spørgsmålet er hvor langt fluen flyver i alt!

Prøv at opstille ligninger for de to tog og fluens zig-zag-bevægelse og tegn grafen for såvel togenes bevægelse som for fluens bevægelse. Brug eventuelt menupunkterne **Parallel**, **Reflektion**, **Linje** og **Skæringspunkt(er)** til at tegne grafen for fluens zig-zag-bevægelse.

Udregn tidspunktet for sammenstødet og find derved hvor langt fluen har fløjet.

Opdel også flyveturen i etaper og udregn for hver enkelt etape henholdsvis den tid etapen tager, som hvor langt fluen flyver i den pågældende etape. Udregn ved hjælp heraf såvel længden af den samlede flyvetur for fluen som den tid den samlede flyvetur tager.

Forklar hvorfor opgaven er en variation af Zenos paradoks om Achilleus og Skildpadden.

Dine noter:

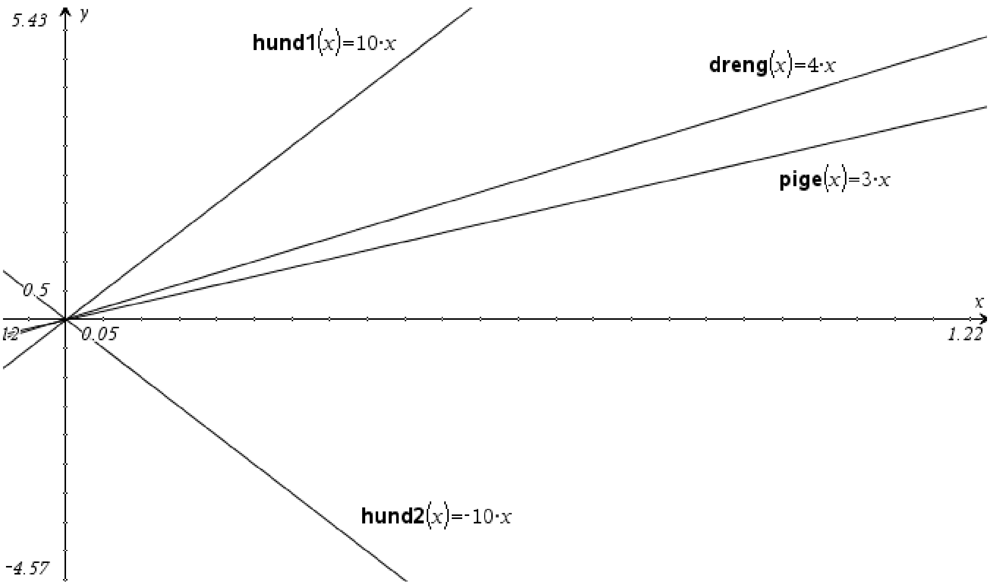
Drengen, pigen og hunden



En dreng en pige og en hund er ude at spadsere langs en landevej; Turen starter i et fælles udgangspunkt. Drengen går med fire kilomenter i timen, pigen med tre kilometer i timen. Hunden løber frem og tilbage mellem drengen og pigen med 10 kilometer i timen.[6]

Spørgsmålet er hvor hunden befinder sig, når der er gået en time, og hvem er hunden på vej hen imod på dette tidspunkt?

For at løse denne opgave er du nødt til at regne baglæns. Du får lidt hjælp til løsning af opgaven, idet du får hjælp til den grafiske konstruktion. I en **Grafer og Geometri** applikation tegner du først graferne for hhv. **dreng(x) = 4·x**, **pige(x) = 3·x**, **hund1(x) = 10·x** og **hund2(x) = -10·x**. Vælg desuden et passende **Zoom** som vist nedenfor:

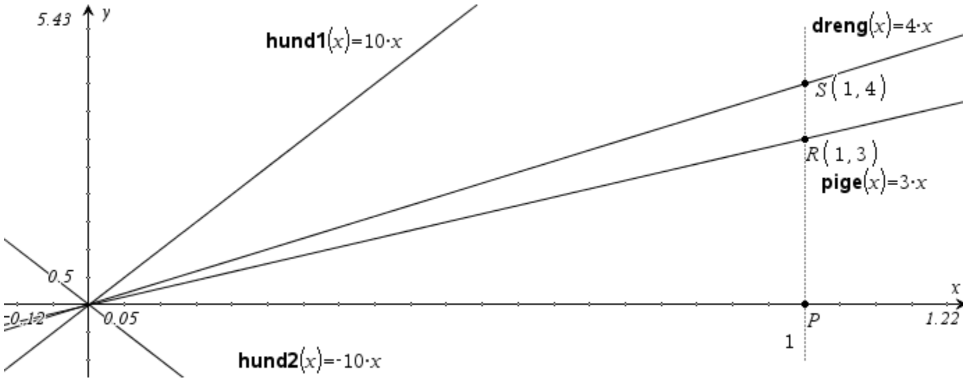


Redegør for graferne som udtryk pigens og drengens spadseretur samt hundes løb. Hvad har vi ud af hhv. x- og y-aksen? Redegør for hældningskoefficienterne?

[6] Opgaven blev stillet i 1971 i januarudgaven af Mathematics Magazine.

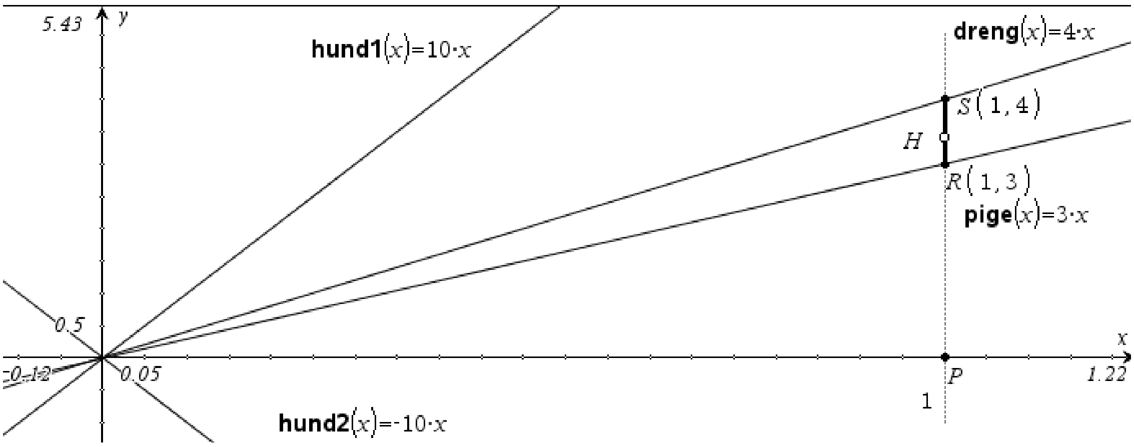
Grænser for kognition: At begrebsliggøre det ubegribelige... Uendelighed!?
Tværfagligt forløb for 1.x 2010 med matematik, dansk og religion

Skriv teksten **1** i grafrummet og overfør værdien til *x*-aksen ved hjælp af menupunktet **Overfør måling**. Navngiv punktet *P*. Oprejs den vinkelrette til *x*-aksen gennem punktet *P* og konstruer skæringspunkterne mellem den vinkelrette og graferne for hhv. **dreng(*x*) = 4·*x*** og **pige(*x*) = 3·*x***. Skæringspunkterne navngives *R* og *S*. Bestem koordinaterne for skæringspunkterne:



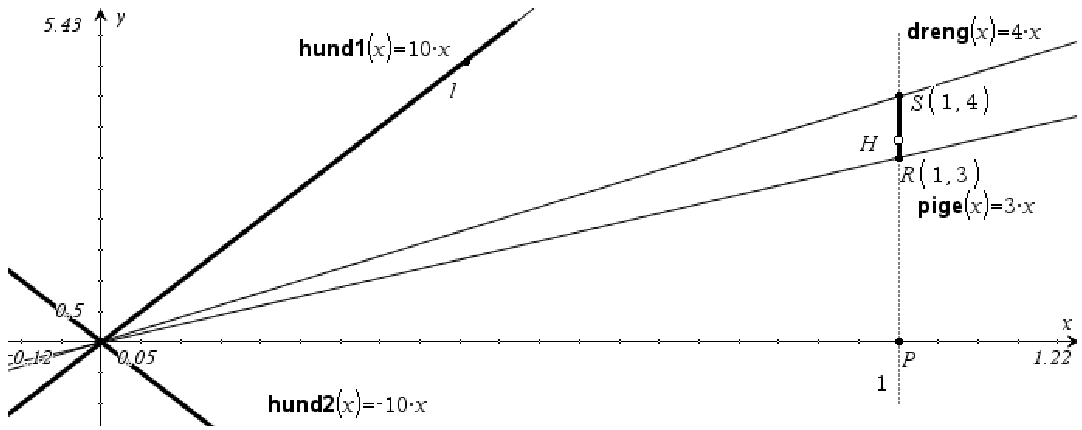
Hvilken betydning har den vinkelrette linje og koordinaterne for *S* og *R*?

Konstruer linjestykket mellem punkterne *S* og *R*. Afsæt herefter et punkt på linjestykket som navngives *H*. Kontrollér at punktet er konstrueret på linjestykket ved at trække i det. Punktet på dette linjestykke repræsenterer hundens "position" efter en time!

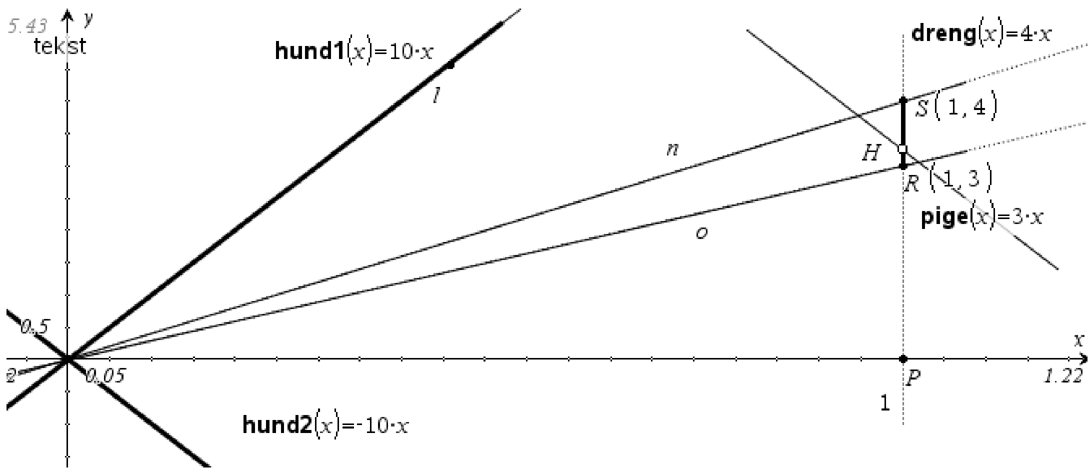


Dine noter:

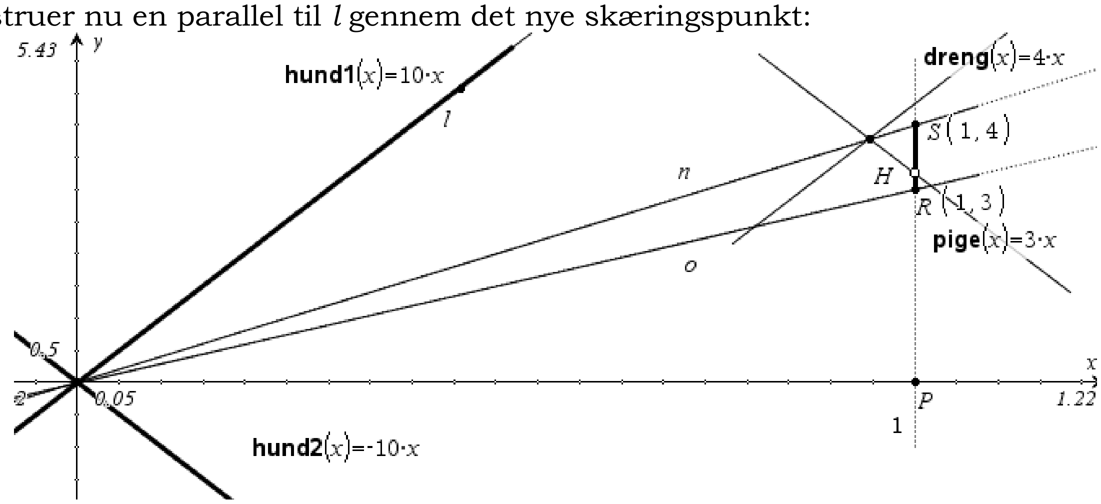
Vi skal nu konstruere hundens løb mellem drengen og pigen ved at tage udgangspunkt i slutpunktet efter en time. Lad os sige at hunden før slutpunktet *H* kom fra drengen og var på vej mod pigen. Træk punktet *H* fri af punkt *S* (ned mod *R*!). Konstruer en ret linje, der ligger ovenpå graferne for hhv. **hund1(*x*) = 10·*x*** og **hund2(*x*) = -10·*x***. Linjerne navngives hhv. *l* og *m*:



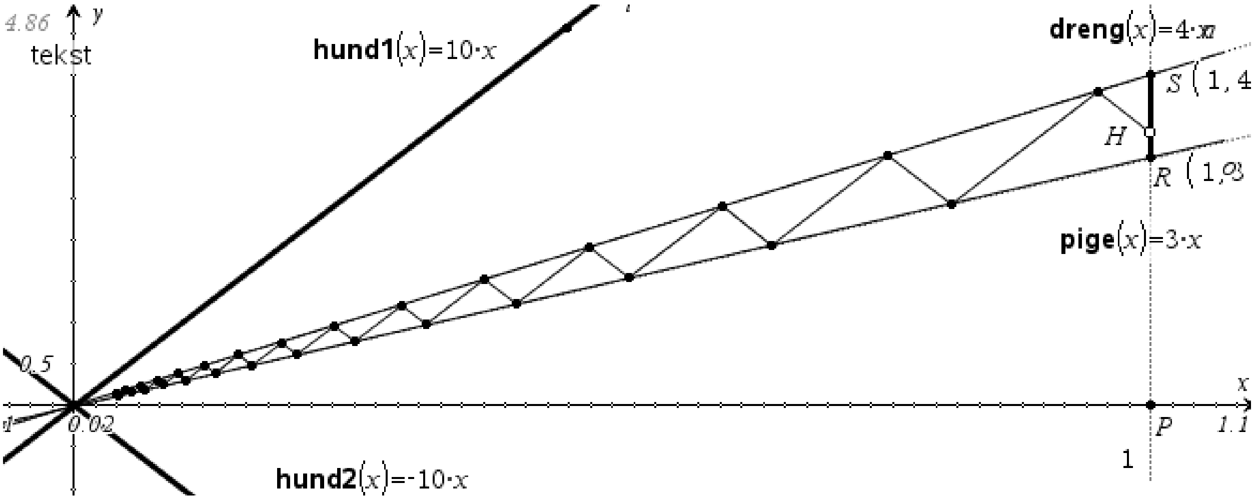
Konstruer desuden en linje på graferne for graferne for hhv. **dreng(*x*) = 4·*x*** og **pige(*x*) = 3·*x***. Disse linjer navngives hhv. *n* og *o*. Konstruer herefter en parallel til *m* gennem *H*:



Konstruer nu en parallel til *l* gennem det nye skæringspunkt:



Fortsæt denne baglæns konstruktion af hundens løb mellem drengen og pigen som ovenfor. Skjul de parallelle linjer og genskab hundens løb som linjestykker:



Træk nu i punktet *H*. Hvad observerer du?

Kan du nu svare på hvor hunden befinder sig, når der er gået en time, og hvem hunden er på vej hen imod på dette tidspunkt?

Dine noter:

Thomsons lampe

Thomsons lampe er en gåde, der er en variation af Zenos paradokser. Den var udtænkt af filosoffen James F. Thomson, som også skabte begrebet supertask, som vi på dansk vil kalde en **superaktivitet**. I en almindelig aktivitet kan man kun udføre endeligt mange gøremål i løbet af et endeligt tidsrum. Men i en superaktivitet udfører man uendeligt mange gøremål i løbet af et endeligt tidsrum! Det er stærkt omdiskuteret om der findes superaktiviteter i den virkelige verden (men fx en hoppende bold kunne være et godt bud på en superaktivitet), men som tankeeksperimenter spiller de en betydelig rolle i moderne filosofi. Her ser vi nu på Thomsons lampe, der er prototypen på en tænkt superaktivitet:

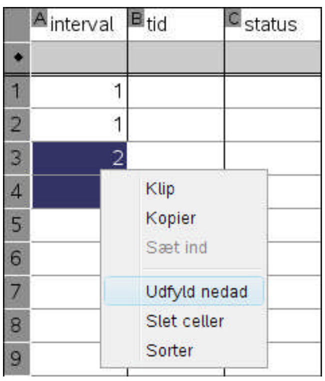
Der findes læselamper med en simpel kontakt på lampens fod: Hvis lampen er slukket og du trykker på kontakten, tændes lampen. Hvis lampen er tændt og du trykker på kontakten, slukkes lampen. Så hvis lampen er slukket og du trykker på kontakten et ulige antal gange, vil den være tændt. Trykker du i stedet på kontakten et lige antal gange vil den være slukket.

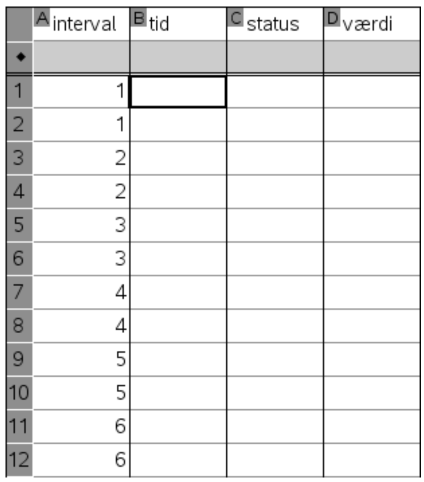
Men hvad nu, hvis lampen er slukket og jeg trykker på kontakten et uendeligt antal gange i løbet af to minutter, f.eks. ved at trykke på kontakten én gang i løbet af det første minut, én gang i løbet af det næste halve minut, én gang i løbet af det næste kvarte minut osv., for så er jeg jo færdig med at trykke på kontakten efter to minutter **– hvorfor**?

Tid	0	1	1.5	1.75	1.875	…	2
Status	Tændes	Slukkes	Tændes	Slukkes	Tændes	…	?
Værdi	1	-1	1	-1	1	…	?

Hvis vi tillægger lampens status værdien -1, når lampen er slukket, og værdien 1, når lampen er tændt kan vi nu illustrere lampens status grafisk. Vi navngiver listerne **interval**, **tid**, **status** og **værdi**. Vi udregner nu status for de ti første intervaller. Men da et interval jo fastlægges af to tider, startværdien og slutværdien, må vi dublere cellerne. Vi skal derfor være en lille smule omhyggelige ved indskrivning af cellekommandoerne i det følgende:

interval: Cellerne **A1** og **A2** tildeles værdien 1 for det første interval (med plads for start og slutværdi). Cellerne **A3** og **A4** tildeles derefter værdierne **=A2+1** og **=A3**, dvs. 2 og 2. Markér cellerne **A3** og **A4**, højre-klik, vælg **Udfyld nedad** og brug piletasterne til at udfylde de første 20 celler med værdierne fra 1 til 10.





tid: Cellerne **B1** og **B2** tildeles værdierne 0. og 1. (læg mærke til decimalpunktummerne!) idet det første interval starter til tiden 0 og slutter til tiden 1. Det andet interval (cellerne **B3** og **B4**) slutter efter yderligere et halvt minut. Værdien af celle **B3** er den samme som **B2**, da det næste interval starter, når det forrige slutter. Det udregnes altså som **= B2**. Men slutværdien skal afspejle at det næste tidsrum kun er halvt så langt som det foregående. Det udregnes derfor som den tid, vi er nået frem til i det foregående interval (her **B3**) plus halvdelen af tidsrummet fra det forrige interval (her fra **B1** og **B2**):

B4	$=b3+\frac{b2-b1}{2}$

	A interval	B tid	C status	D værdi
◆				
1	1	0.		
2	1	1.		
3	2	1.		
4	2	1.5		
5	3	1.5		
6	3	1.75		
7	4	1.75		
8	4	1.875		
9	5	1.875		
10	5	1.9375		
11	6	1.9375		
12	6	1.96875		

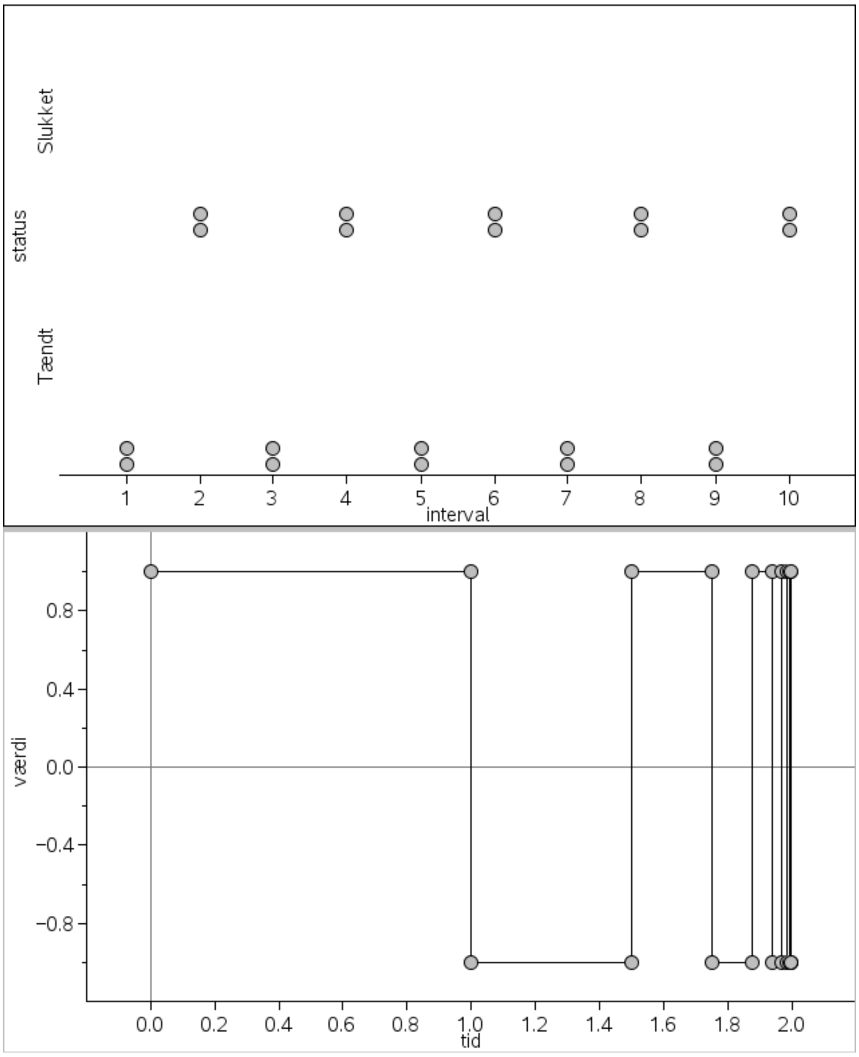
Vi højreklikker på cellerne **B3** og **B4** og bruger piletasterne på tastaturet for at udfylde tidspunkterne for de ti første intervaller (dvs. de 20 første celleer).

status: I cellerne **C1** og **C2** skriver vi "**Tændt**" som status for lampen ved det angivne interval (husk gåseøjnene!). I cellerne **C3** og **C4** skriver vi tilsvarende "**Slukket**". Udfyld herefter de ti første cellers status ved at markere de fire første celler og udfylde nedad. Statusværdien i det første interval er 1, da lampen tændes ved tiden 0 og statusværdien er -1 i det andet interval, idet lampen slukkes igen til tiden 1.

værdi: Hefter gør vi præcis det samme i søjlen for værdi, idet -1 står for slukket og 1 for tændt.

	A interval	B tid	C status	D værdi
◆				
1	1	0.	Tændt	1
2	1	1.	Tændt	1
3	2	1.	Slukket	-1
4	2	1.5	Slukket	-1
5	3	1.5	Tændt	1
6	3	1.75	Tændt	1
7	4	1.75	Slukket	-1
8	4	1.875	Slukket	-1
9	5	1.875	Tændt	1
10	5	1.9375	Tændt	1
11	6	1.9375	Slukket	-1
12	6	1.96875	Slukket	-1

Vi indsætter nu en ny side og splitter siden i to dele i horisontalt niveau. Vi indsætter to **Data og Statisk** applikationer. I det øverste vindue tilføjer vi hhv. **interval** til x-aksen og **status** til y-aksen. I det nederste vindue tilføjer vi hhv. **tid** til x-aksen og **værdi** til y-aksen, idet vi desuden højre-klikker og vælger **Forbind datapunkter**:

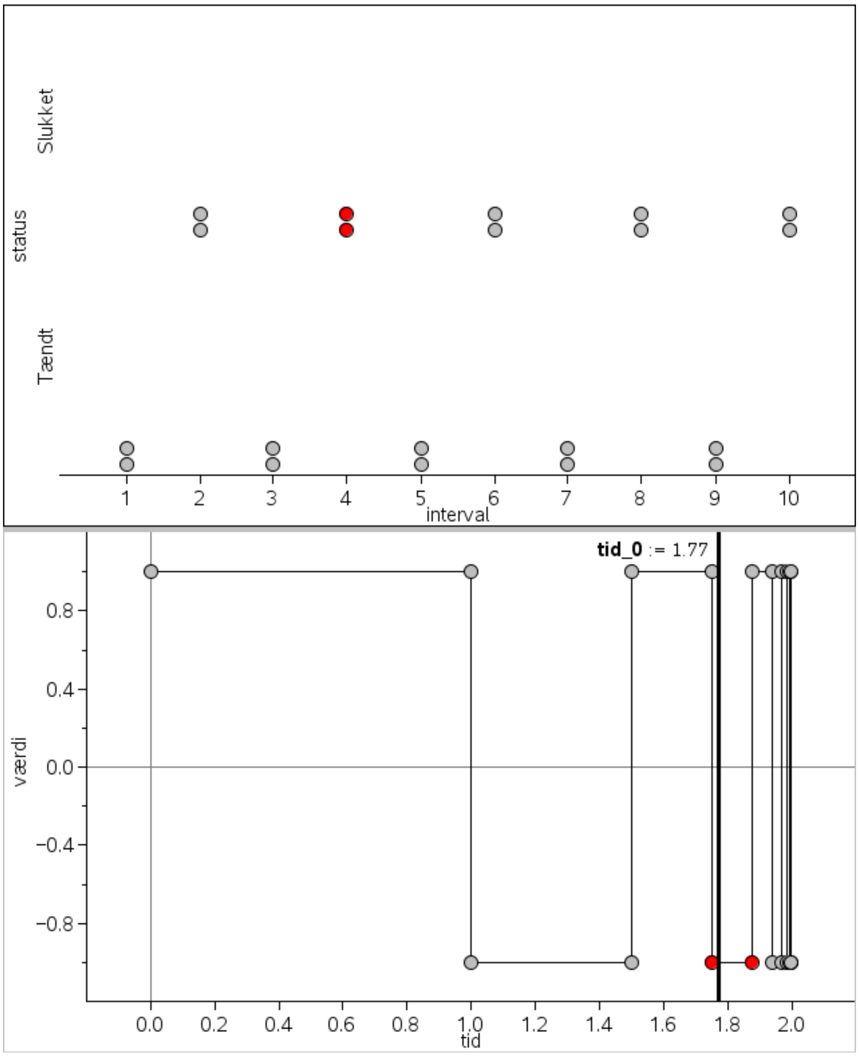


Vi ser da fx , at lampen til tiden 0 tændes og derfor får tildelt værdien 1. Til tiden 1 minut slukkes lampen og får derefter tildelt værdien -1. Begge grafer indeholder i en vis forstand den samme information, men i den øverste graf er der fokus på intervallerne, mens den nederste graf har fokus på tiden. Den øverste graf svarer altså til haren og hunden hvor vi fokuserer på spring, som det koordinerende element, mens vi aktivt inddrager tiden i den nederste. Udvider vi antallet af intervaller, vil den øverste graf blot fortsætte i det uendelige, mens den nederste graf under alle omstændigheder slutter til tiden 2 og vi må zoome ind hvis vi vil se de nye detaljer!

Med tabellen og grafen kan vi for ethvert **givet** tidspunkt indenfor de to første minutter sige hvilken status lampen til et givet tidspunkt: Er den tændt? er den slukket? eller er den ved at skifte status fra tændt til slukket eller fra slukket til tændt.

Lad os sige at vi skal bestemme det interval tiden 1.770 minutter falder indenfor. Af tabellen ser vi at tidspunktet ligger i det 4. interval fra 1.750 til 1.875 minutter. I Data og Statistik applikationen indsætter vi værdien 1.770 minutter ved hjælp af menupunktet **Plot værdi**:

	A interval	B tid	C status	D værdi
◆				
1	1	0.	Tændt	1
2	1	1.	Tændt	1
3	2	1.	Slukket	-1
4	2	1.5	Slukket	-1
5	3	1.5	Tændt	1
6	3	1.75	Tændt	1
7	4	1.75	Slukket	-1
8	4	1.875	Slukket	-1
9	5	1.875	Tændt	1
10	5	1.9375	Tændt	1
11	6	1.9375	Slukket	-1
12	6	1.96875	Slukket	-1

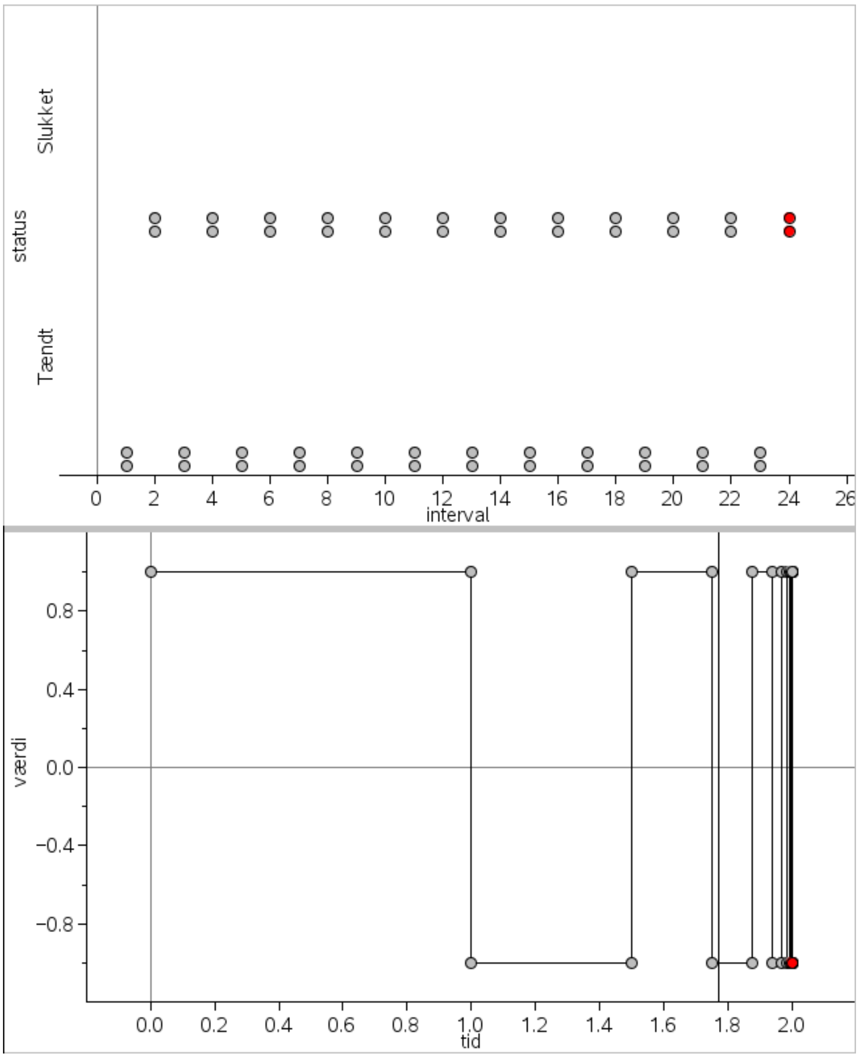


Vi ser altså at lampen i dette interval er slukket!

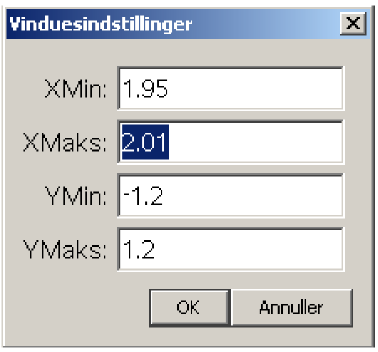
Af grafen ser vi at længden af intervallernes tids udstrækning aftager drastisk, idet intervallængderne halveres. De vandrette forbindelseslinjer bliver kortere og kortere efterhånden som vi nærmer os to minutter. Tilsyneladende er den uendelige sekvens af statusændringer overstået efter to minutter, idet vi ikke overskrider to minutter!

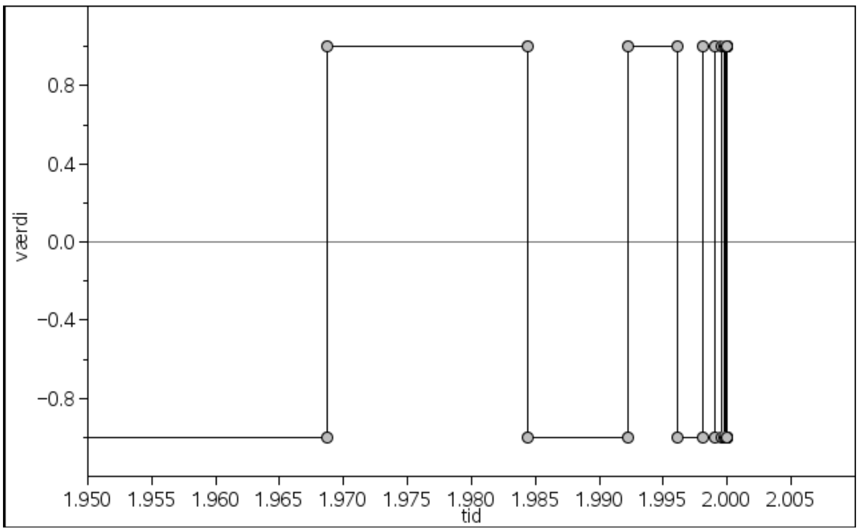
I tabellen markerer vi de fire sidste rækker med data for det 9. til 10. interval. Vi højreklikker for at udfylde de 24 første intervaller. Vi ser at TI-Nspire ”giver op” efter det 19. interval hvor den ”afrunder” den uendelige sekvens og returnerer værdien 2:

	A interval	B tid	C status	D værdi
◆				
36	18	1.99999	Slukket	-1
37	19	1.99999	Tændt	1
38	19	2.	Tændt	1
39	20	2.	Slukket	-1
40	20	2.	Slukket	-1
41	21	2.	Tændt	1
42	21	2.	Tændt	1
43	22	2.	Slukket	-1
44	22	2.	Slukket	-1
45	23	2.	Tændt	1
46	23	2.	Tændt	1
47	24	2.	Slukket	-1
48	24	2.	Slukket	-1



I **Data og Statistik** vinduet højreklikker vi for at Zoome ind på x-intervallet fra 1.95 til 2.01 minutter via **Vinduesindstillinger**:





Vi har altså ovenfor set, at vi kan besvare en række spørgsmål der knytter sig til hvordan lampen opfører sig inden for de to første minutter. Vi har også set, at den uendelige sekvens er overstået efter to minutter.

Men vi får også rejst nye spørgsmål af vores undersøgelse:

- Vil lampen så være tændt eller slukket efter præcis to minutter?
- Ville der være forskel på slutstatus hvis lampen havde været tændt i starten i stedet for slukket?

I vores undersøgelse tillagde vi lampens status værdien 1 eller -1 hvis den var hhv. tændt eller slukket. Altså er sekvensen $\{1,-1,1,-1,1,-1,...\}$ udtryk for at lampen skifter status fra at være tændt til at være slukket, idet den starter med at blive tændt. I stedet for at betragte denne talfølge, danner vi i stedet summen, dvs. den tilhørende række, som giver Grandis uendelige sum:

$$S = 1-1+1-1+1\cdots$$

En endelig sekvens af statusændringer svarer dermed til at bestemme en endelig sum. Lampen er som udgangspunkt slukket, så hvis vi har trykket en gang får vi netop summen S = 1, hvorfor lampens nu er tændt. Hvis vi har trykket endnu engang er summen ændret til S = 1-1 = 0, og lampen er nu slukket. Trykker vi endnu engang fås nu S = 1-1+1 = 1 og lampen er derfor igen tændt. Altså vil vi efter en endelig sekvens af statusændringer have en sum, der enten er 1 eller 0, alt efter om der har foregået et lige eller ulige antal skift. Hvis summen er lig 1 har vi trykket et ulige antal gange og lampen er tændt. Trykkes et lige antal gange er summen 0 og lampen er slukket.

At besvare ovenstående spørgsmål om hvorvidt lampen er tændt eller slukket efter nøjagtigt to minutter svarer dermed til at bestemme summen efter uendelig mange sekvenser. Så spørgsmålet er om summen giver 1 eller 0 svarende til at vi efter uendelig mange gange har trykket et lige eller ulige antal gange. Men det kan vi jo ikke svare på for det svarer til at sige at en uendelig sekvens er et lige eller ulige tal!

En anden måde at illustrere problemet på er at betragte Grandis række, dvs. summen for uendelig mange led:

$$S = 1-1+1-1+1\cdots$$

Denne serie kan omskrives til:

$$S = 1-\left(1+1-1+1\cdots\right) = 1-S$$

Ved ligningsløsning får vi altså at $2\cdot S = 1$ hvorfor $S = \dfrac{1}{2}$! Så lampen er hverken tændt eller slukket og dette uanset om lampen var tændt eller slukket fra starten!

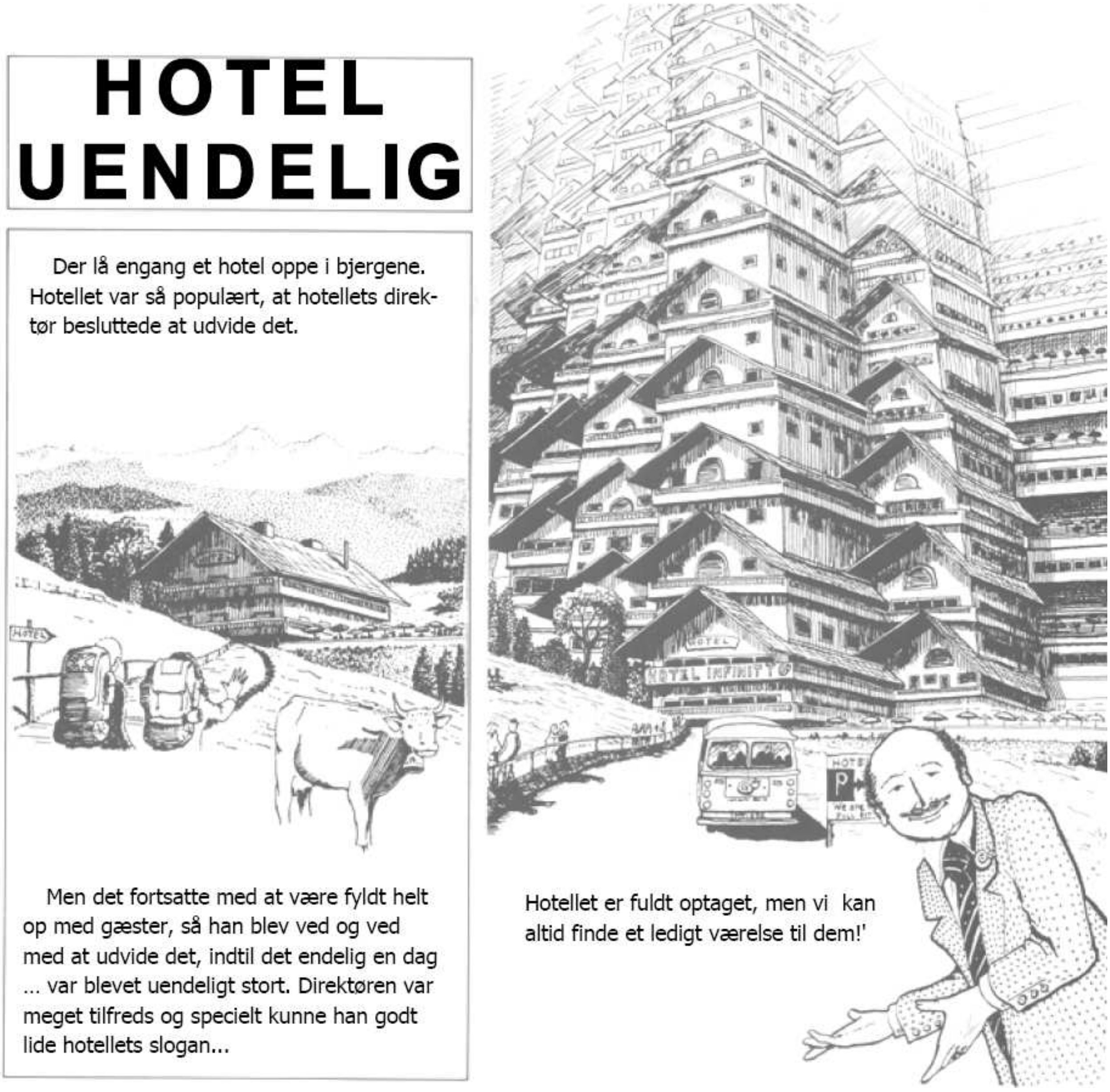
Grandis række kan omskrives til:

$$S = 1-1+1-1+1\cdots = \left(-1\right)^0 + \left(-1\right)^1 + \left(-1\right)^2 + \left(-1\right)^3 + \left(-1\right)^4 + \cdots$$

Forsøger vi herefter at lade TI-Nspire beregne den uendelige sum, ser vi at summen divergerer, dvs. ikke kan tillægges nogen værdi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\right) \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos(n\cdot\pi)\right)$$

1. projektemne: Hilberts hotel



2. projektemne: Magiske trapper

Magiske Trapper

Forestil dig en trappe, der fortsætter op og op ····

···· uden ende?
···· der er altid et næste trin!

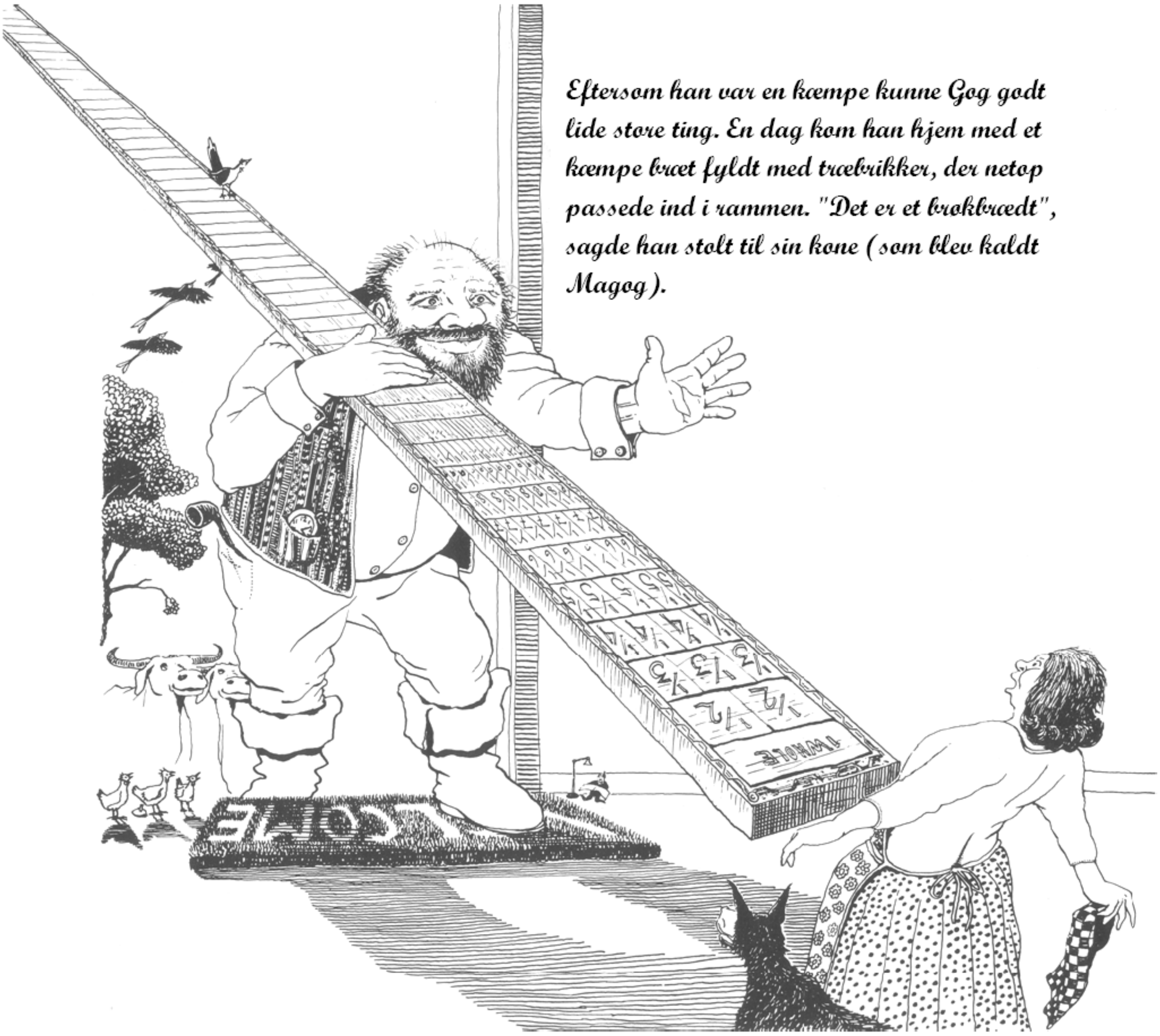
Selvfølgelig stopper de fleste trapper, når man når til gadeplanet. Men med magiske trapper er det noget andet – For det første har trinene ikke den samme størrelse. Fx kunne det jo være at trinene blev halveret, for hver gang du tog et trin nedad.

Men så kan det være du forestiller dig, at du på vej ned ad trappen snart bliver nødt til at tage to trin, fire trin, otte trin, ···· ad gangen.

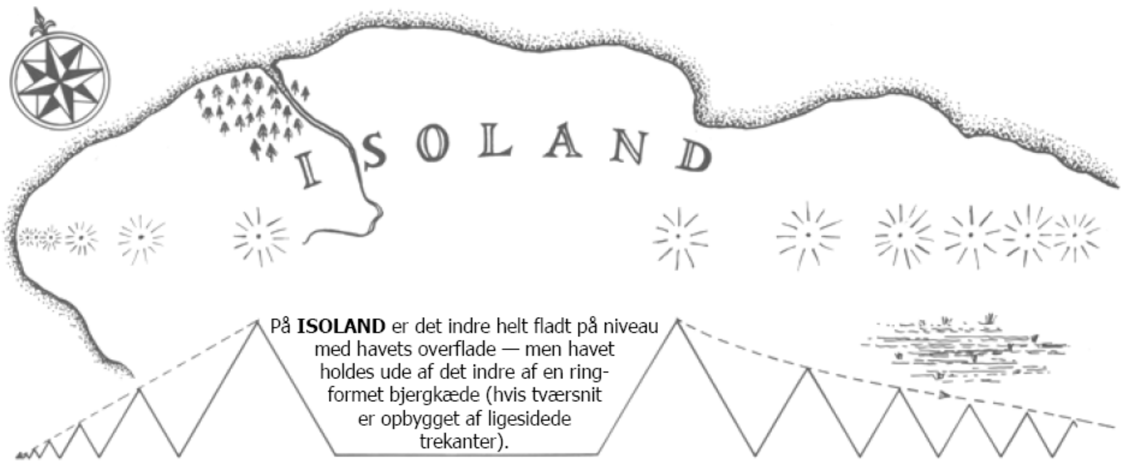
Men nej – for det er en del af magien, at hver gang du tager et trin ned af trappen, skrumper du til den halve størrelse. (Selvfølgelig må det være sådan for ellers ville dine fødder jo hurtigt blive for store til trinene.) Så det føles som om trinene altid har den rette størrelse.

Når man bygger en magisk trappe
skal man starte for oven og arbejde sig nedad.
Det er nødvendigt at lave nogle omhyggelige beregninger
for hvis man starter *for* højt, ender man *ikke* på gadeplanet.
Håndværkerne har kludret i det før — Fx da de byggede en magisk trappe i Århus —
de er stadigvæk i gang med at bygge den, men er nu nået til trin *177000000 000 000 000 000 000 000 000 000 000*
000 000 000 000 000 000 000 000 000 ...

3. projektemne: Eventyret om Gog og Magog



4. projektemne: ISOLAND

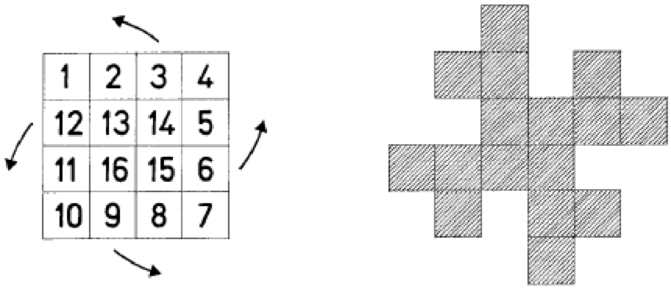


Et sted er der en bjergkæde, som Isolændingene kalder de **Ligedannede Bjerge**. Siderne på disse bjerge aftager regelmæssigt ud mod havet — den skrå side på det højeste bjerg er 1/2 mil, den næste 1/4 mil, så følger 1/8 mil, 1/16 mil osv. Isolændingene holder meget af disse bjerge for fra toppen af dem kan du se helt ud til stranden: Og det tager kun en gåtur op og ned af bjergsiderne på halvanden mil for at komme ud til stranden.

Et andet sted er der en bjergkæde, som Isolændingene kalder de **Harmoniske Bjerge**. Siderne på disse bjerge aftager også regelmæssigt ud mod havet — det højeste bjerg har en side på 1/2 mil, men det næste har en side på 1/3 mil, så følger 1/4 mil, derefter 1/5 mil osv. Man kan ikke se stranden fra disse bjerge – de andre står hele tiden i vejen. Og der er længere ud til stranden – endda meget længere; faktisk er der rigtigt meget længere!

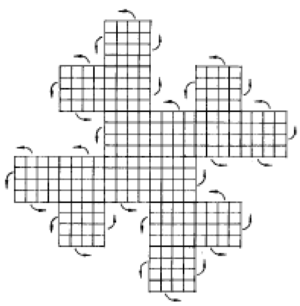
5. projektemne: Kløverøen

Forestil dig en ø, der starter som et kvadrat. Hver dag kommer havet og gnaver sig ind på øen, samtidig med at det aflejrer det frigjorte materiale rundt langs øen. Øen ændrer derfor langsomt udseende efter nogle simple regler, som vi nu vil fastlægge. Vi dele. kvadratet i 16 lige store delkvadrater. Disse nummereres fra 1 til 16 som vist på figuren. Når havet gnaver sig ind på øen, fjerner det langs hver af siderne det tredje randkvadrat og aflejrer det ud for nabokvadratet. Den første dag fjerner havet altså randkvadraterne 3, 6, 9 og 12 og aflejrer dem ud for kvadraterne 2, 5, 8 og 11. Efter den første dag ser øen derfor således ud:

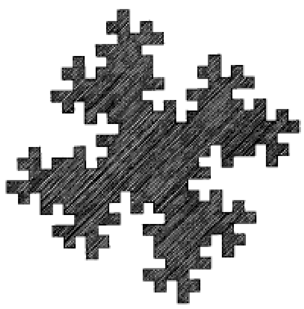


Kløverøen efter 1. dag.

De 16 delkvadrater deles nu i 16 nye kvadrater, der kan nummereres på samme måde som før. De yderste randkvadrater omfordeles som før. Havet gnaver sig ind på øen og fjerner hvert tredje randkvadrat og aflejrer det ved siden af. Efter den anden dag ser øen derfor således ud:

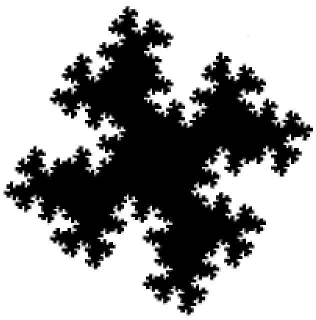


Havet gnaver sig ind på øen.

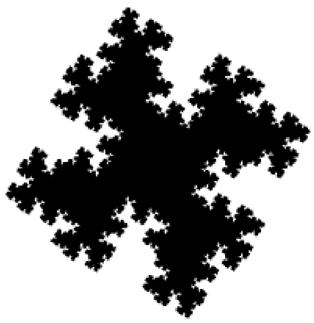


Kløverøen efter 2. dag.

Sådan fortsætter det dag efter dag!



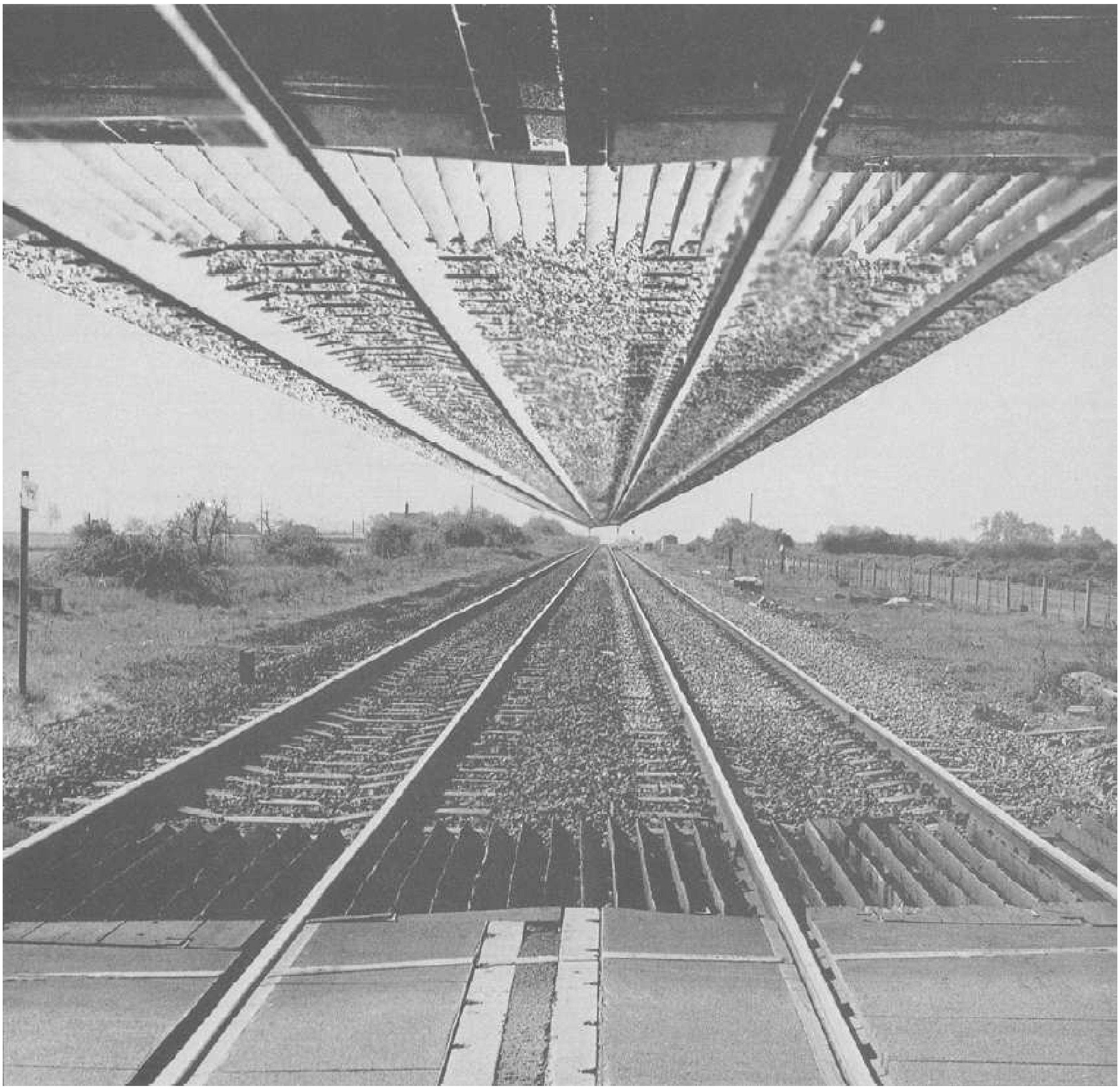
Kløverøen efter 3. dag.



Den yderste dag!

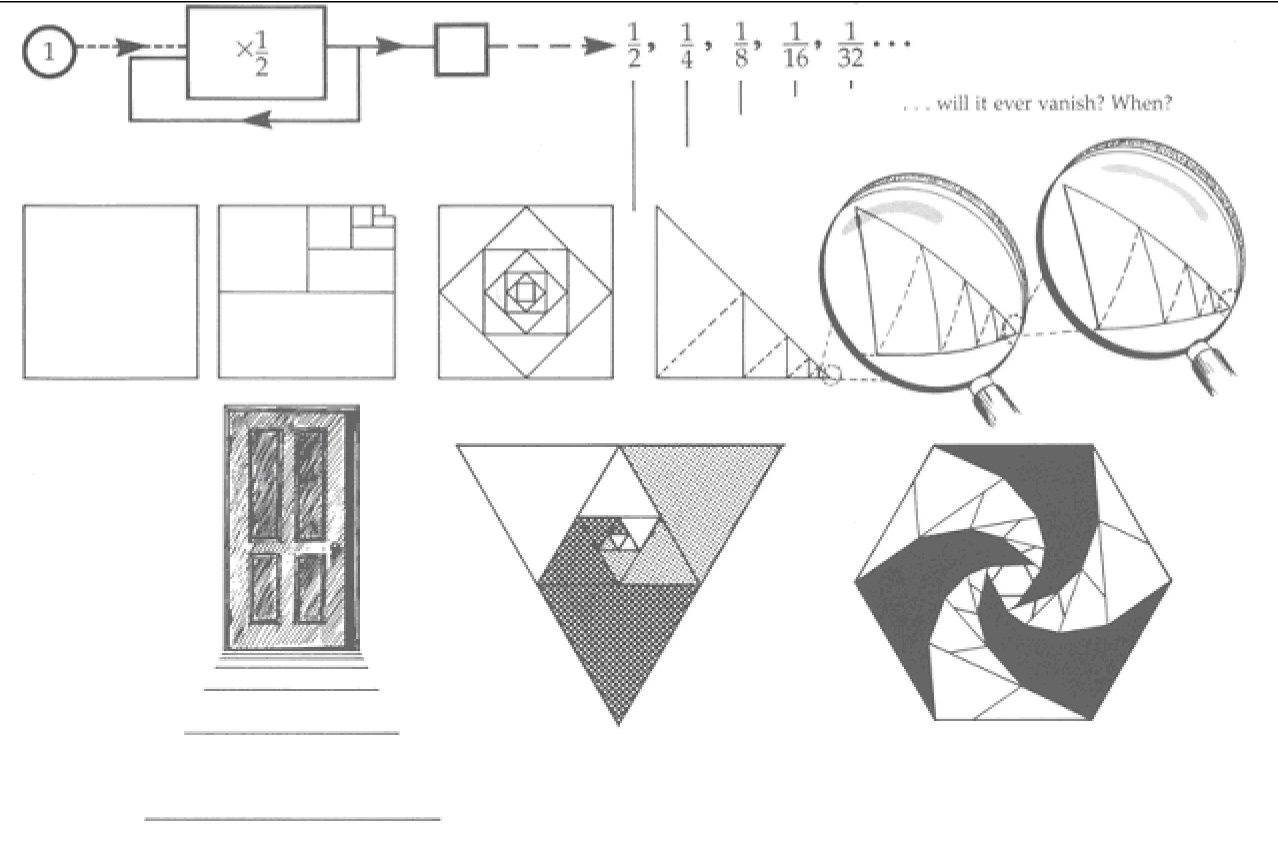
Når der er gået uendelig mange dage (på "den yderste dag"), har havet så fået frembragt en fraktal ø, **Kløverøen**.

6. projektemne: Uendeligt fjerne punkter



Hvad forestiller billedet?

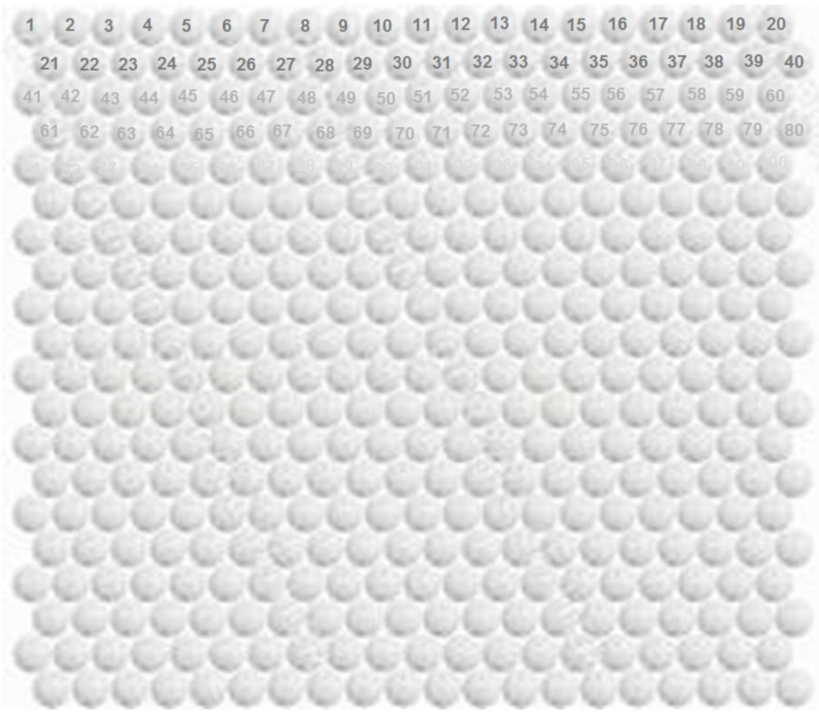
7. projektemne: Gensyn med Zeno!



Du vil aldrig nå ud af værelset…
Hvor langt er der til døren? Otte meter? Hvis du kom halvvejs til døren vil der stadig være den halve distance tilbage (fire meter). Og hvis du tilbagelagde halvdelen af denne distance vil der stadig have en halv distance tilbage. Altså vil der altid være halve distancer tilbage. Du vil dermed aldrig nå hen til døren! Det samme gælder ræsonnement gælder uanset hvilken distance der skal tilbagelægges. Altså vil du ikke en gang nå ¼ af vejen til døren… rent faktisk vil du ikke komme ud af stedet!

The story on the left was first told by Zeno 25 centuries ago . . . Modern scientists tell a similar story about radioactive isotopes. For any particular element, half of the radioactive atoms decay into some other isotope in a certain period (called the half-life of that element). For example, half the carbon-14 atoms in a piece of dead material change into nitrogen-14 atoms after about 5720 years. But half of them are still there. In another 5720 years half of that half will have decayed. If it went on like this, would the carbon ever completely disappear?

8. projektemne: Boldene og vasen



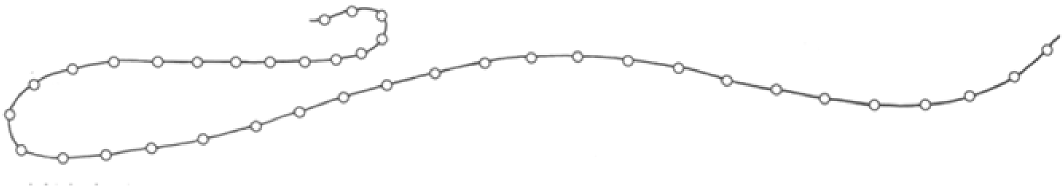
Forestil dig at du har en uendelig samling af tennisbolde, der er nummereret 1, 2, 3, … — og at din makker har en uendeligt stor vase. Din opgave er nu at smide alle boldene op i vasen, makkerens at smide dem ud igen. Da der er uendeligt mange bolde er det en superaktivitet, idet den skal udføres på en endelig tid!

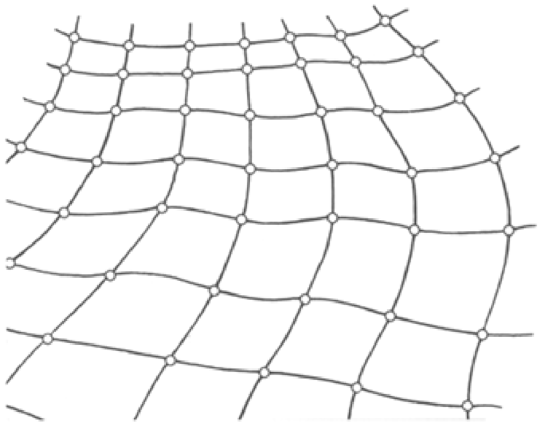
Til at begynde med ligger alle boldene altså uden for vasen!
Et helt minut i 12 smider du lynhurtigt boldene 1-10 op i vasen, og din makker fjerner straks bold 10.
Et halvt minut i 12 smider du lynhurtigt boldene 11-20 op i vasen, og din makker fjerner straks bold 20.
Et kvart minut i 12 smider du lynhurtigt boldene 21.30 op i vasen, og din makker fjerner straks bold 30.
Og således bliver i bare ved og ved og ved …

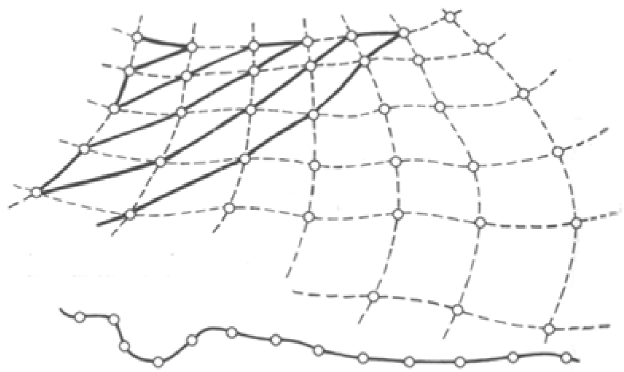
Hvor mange bolde vil der så være i vasen kl. 12?

9. projektemne: Kæder uden grænser

Tænk på en uendelig række
af perler på en snor …



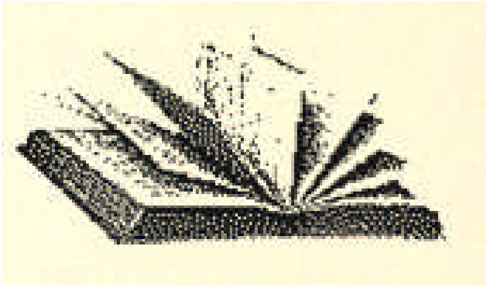




og tænk så på perlerne i et uendeligt net …

Er der flest perler på snoren eller i nettet?

10. projektemne: Bogen af sand



Jeg slog op et tilfældigt sted. Skriften var mig fremmed. Siderne, som forekom mig at være slidte og dårligt trykte, var tospaltede på samme måde som en bibel. Teksten stod tæt og var ordnet i bibelvers. I sidernes øverste hjørne stod der arabiske tal. Jeg lagde mærke til, at den lige side kunne have tallet (lad os sige) 40.514 og den ulige, den følgende, 999. Jeg bladrede; bagsiden havde et ottecifret tal. Den var forsynet med en lille illustration, som dem, man bruger i ordbøger: et anker tegnet med pen, som af et barns kejtede hånd.

Da var det, at den ukendte sagde til mig:
– Se godt på den. De får den aldrig at se igen. Der lå en trussel i udsagnet, men ikke i stemmen.