Baggrundsnote om Toulmins argumentmodel i matematik

Traditionelt har matematikken i den vestlige verdens kulturhistorie stået som modellen for hvordan man kunne opnå sikker viden med Euklids elementer som forbilledet: Med udgangspunkt i præcise definitioner, sikre uangribelige udgangspunkter og korrekte logiske slutninger argumenterer man for et netværk af sikre konklusioner, der hænger indbyrdes sammen i lange kæder af beviser. Hvorfor skulle man så interessere sig for andre argumentmodeller i matematik? I vores tilfælde interesserer vi os nu for Toulmins argumentmodel, der også rummer muligheden for at vurdere styrken af et argument, henholdsvis gendrive/tilbagevise et argument, noget der ligger det klassiske matematiske bevis fjernt. Det er der flere grunde til:

For det første den oplagte grund, at andre fag benytter sig af mindre fuldkomne argumentmodeller, hvor man ikke nødvendigvis beviser sine påstande men i stedet sandsynliggør/underbygger dem med troværdige argumenter, som nok giver en høj grad af sikkerhed for påstandene, men også åbner mulighed for at gendrive dem ved at påpege svaghederne i argumentationen. I andre fag kan problemstillingerne nemt være så komplekse, at man ikke kan gøre sig håb om fuldkommen sikkerhed, men nok om at kunne træffe fornuftige rationelt begrundede valg mellem flere muligheder. Og da matematik jo skal samarbejde med disse andre fag kan det lette samarbejdet betydeligt, hvis matematik også kan betjene sig af de andre fags argumentmodeller, hvoraf Toulmins argumentmodel er den mest udbredte.

For det andet fordi matematikken selv ikke nødvendigvis hviler på så sikker grund som almindeligt antaget. I forrige århundrede blev det således i første omgang opdaget at Euklids elementer indeholder adskillige huller i sin argumentation: upræcise definitioner af fx de mest grundlæggende begreber som punkt og linje, ubevidste antagelser fx om kontinuitet og andre egenskaber ved geometriske figurer, og endeligt tvivlsomme bevismetoder fx ved kongruensbeviser, hvor figurer bringes til at overdække hinanden. I forsøget på at lukke disse huller opdagede man forskellige dybe paradokser i den matematiske logik, der gjorde det klart at der slet ikke fandtes et fuldstændigt sikkert fundament for de matematiske beviser.

Samtidigt blev der rejst tvivl om hvad det vil sige at noget eksisterer i matematisk forstand. Mange matematiske eksistensbeviser er nemlig indirekte, dvs. de viser eksistensen af en genstand uden direkte at konstruere den, idet de støtter sig på det logiske princip: For en enhver velformet matematisk påstand vil der altid gælde at enten er påstanden sand eller også er den falsk, en tredje mulighed gives ikke (tertium non datur - princippet). Men blandt de såkaldte intuitionister anerkendes sådanne eksistensbeviser ikke. Her skal man netop angive konstruktion i et endeligt antal skridt for at bevise at en genstand eksisterer. Det åbner netop muligheden for at drive en kile ind i matematiske beviser, idet graden af deres troværdighed fx kan vurderes ved i hvor høj grad de støtter sig til tertium-non-datur-princippet. Selvfølgelig skal vi ikke tage hensyn til sådanne sofisterier på C-niveauet, men på A-niveauet kan vi sagtens inddrage den slags overvejelser, når vi vil perspektivere udviklingstendenser i den moderne matematik.

Faktisk bør vi ifølge forfatteren Svend Åge Madsen, der selv er uddannet som matematiker, undervise i den slags perspektiver. I 'Oprør fra den udelukkede midte' (en elegant flertydig titel) argumenterer han for at det netop er oplevelsen af den slags problemstillinger i matematikken, der virkeligt fænger.

Lad os se på et simpelt eksempel: På A-niveau vil vi traditionelt undervise i rationale og irrationale tal og fx bevise at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal. Det er nu også nemt at overbevise sig om at hvis a og b er hele tal gælder det samme om potensen a^b. Men hvad nu hvis a og b er irrationale tal:

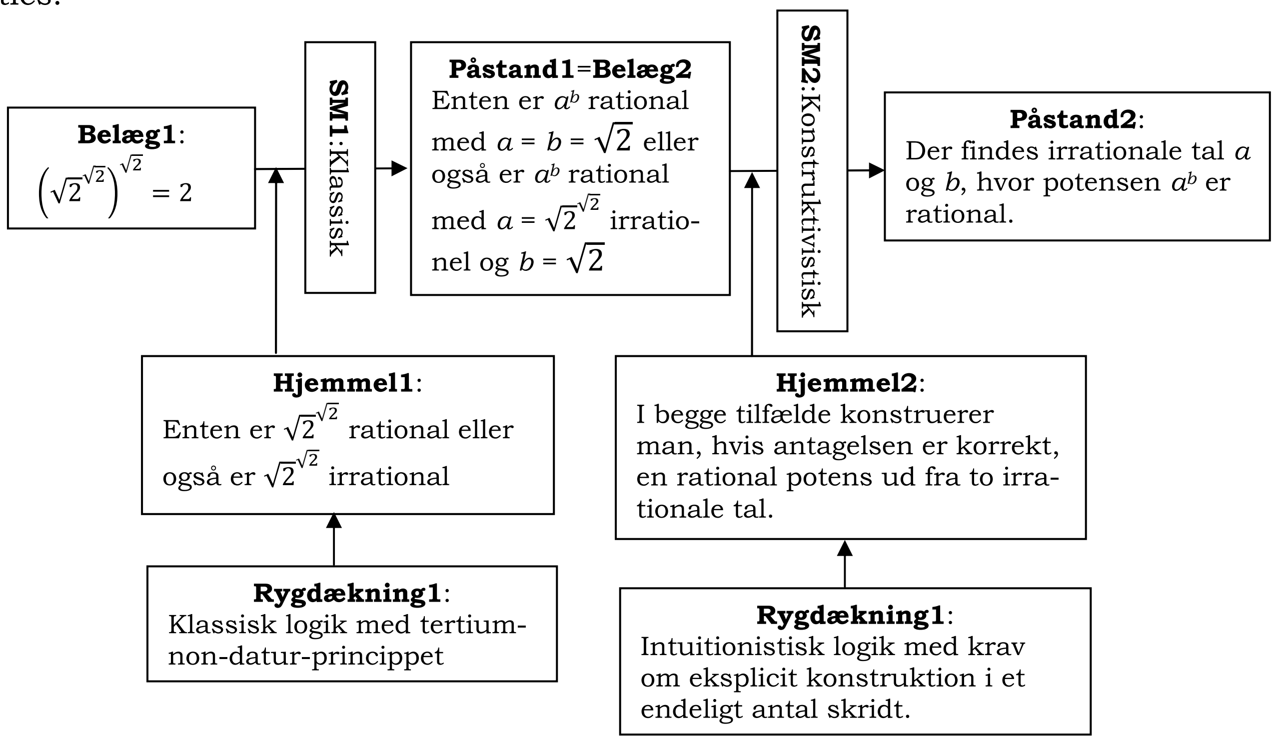
Gælder der så også at potensen a^b nødvendigvis er irrational ?

Det er faktisk ikke helt nemt at afgøre, for hvis vi vil tilbagevise påstanden skal vi jo komme med et eksempel på to irrationale tal a og b, hvorom det gælder at a^b er rational. Der findes imidlertid et meget simpelt indirekte argument, der bygger på tertium-non-datur-princippet. Vi kan nemlig se på tallet $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Enten er det rationelt og så er vi færdige (idet vi blot kan sætte $a = b = \sqrt{2}$) eller også er det irrationelt. Men hvis tallet $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ er irrationelt kan vi nu sætte $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ og $b = \sqrt{2}$. Ifølge antagelsen er begge disse tal irrationelle. Men vi finder nu for potensen a^b:

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Igen er vi derfor færdige, idet vi har fundet to irrationelle tal a og b, hvis potens a^b er rationel. Vi har altså nu to mulige kandidater til en rational potens a^b, hvor a og b er irrationelle. Vi ved ikke hvilken af dem, der er korrekt, vi ved bare at en af dem må være korrekt ifølge tertium-non-datur-princippet!

Et sådant eksempel kan nu analysere ved hjælp af Toulmins argumentmodel, her tillempet efter Aberdeins artikel: The uses of Argument in Mathematics:



Argumentet kan altså som vist deles op i to dele, hvor den ene har sin rygdækning i den klassiske logik og derfor får den svage styrkemarkør (**SM1**) 'Klassisk', mens den anden har sin rygdækning i den intuitionistiske logik og derfor får den stærke styrkemarkør (**SM2**) 'Konstruktivistisk'. Hvis vi derfor kun kan leve med en stærk styrkemarkør er vi derfor nødt til at erstatte den første del af argumentet med et direkte bevis for at tallet $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ er irrationelt. Det er imidlertid ikke nogen simpel sag!

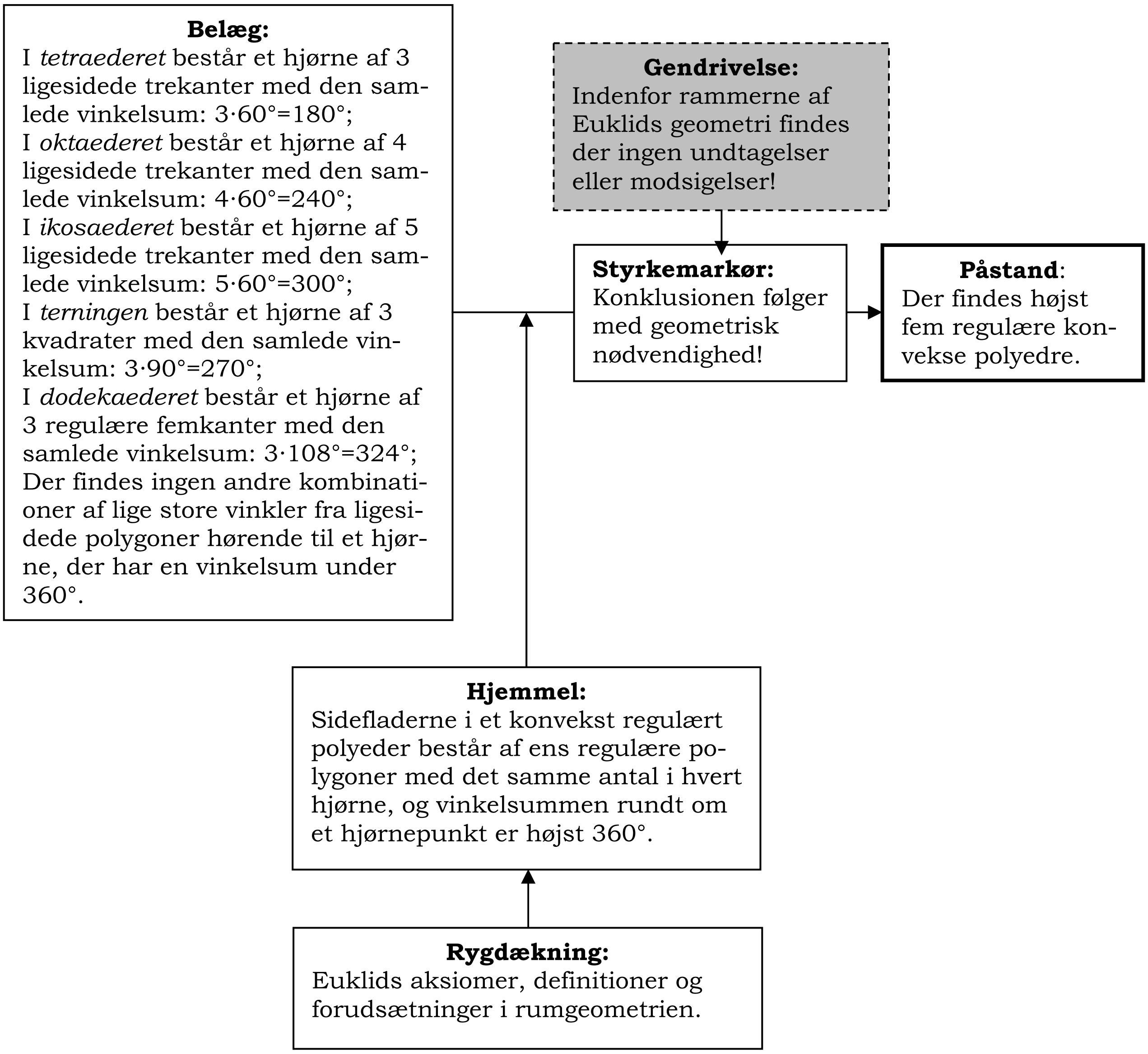
Hvis vi ikke ønsker at diskutere grundlagskrisen i matematik kan vi nøjes med at diskutere forskellen på direkte og indirekte konstruktionsbeviser. Hvis vi igen bliver indenfor tallenes verden kan vi fx vise eksistensen af transcendente tal ved hjælp af Liouvilles konkrete eksempel på et transcendent tal eller vi kan bruge Cantors indirekte bevis for eksistensen af transcendente tal idet vi viser at de algebraiske tal udgør en tællelig mængde, mens de reelle tal ikke er tællelige. Den slags indirekte beviser for eksistensen af matematiske objekter kom første gang i fokus i matematikken i en berømt sætning af Hilbert (sætningen, der danner grundlaget for moderne algebraisk geometri er ikke helt nem at forklare). En anden kendt matematiker Gordan kommenterede Hilberts bevis således: 'Jamen, det er jo ikke matematik, men teologi'. Hvorfor skal vi tro på eksistensen af noget, som vi ikke har været i stand til at konstruere eksplicit? Intuitionister som Brouwer rasede over Hilberts ubekymrede jongleren med uendelige mængder, men Hilbert selv svarede: 'At tage tertium non datur princippet fra matematikere er det samme som at forhindre en bokser i at bruge sine næver.'

Tilbage til Toulmins argumentmodel og hvorfor den er relevant for vores forståelse af matematik (udover det tværfaglige argument). Vi ser nu bort fra grundlagskrisen og for diskussionen om hvad der udgør et acceptabelt eksistensbevis. I den almindelige matematiske praksis er beviser langt fra så skudsikre, som vi får dem præsenteret i lærebøgerne. Når man rent faktisk udøver matematik og går på opdagelse i ukendt terræn, vil man ofte fremkomme med påstande, der viser sig ikke at holde for en nærmere analyse. Faktisk er det måske snarere normen end undtagelsen. Det er en af de overraskende konklusioner i Lakatos frontalangreb på den traditionelle fagopfattelse i matematik, som han lancerede i den berømte bog: 'Proofs and refutations: The Logic of Mathematical Discovery' fra 1976. Den handler netop om gendrivelsens rolle i matematiske beviser, sådan de rent faktisk udspiller sig i den virkelige verden og ikke i den idealiserede lærebogsverden. Lakatos styrker ydermere argumentets rolle ved at præsentere sin diskussion i form af en dialog mellem forskellige matematikere alpha, beta osv. og skriver sig dermed ind i en lang tradition (Platon, Galilei, ...) der har eksisteret sideløbende med Euklids måde at præsentere matematikken på. I denne dialog udfordrer deltagerne hinanden med at komme med krav om rygdækning eller yderligere belæg, komme med gendrivelser osv. Med andre ord der argumenteres på livet løs, således som det også sker i den virkelige verden, når matematikere præsenterer deres opdagelser for hinanden og skal prøve at overbevise deres kolleger om deres påstande.

I Lakatos bog bruger han Eulers polyeder-sætning som et eksempel. Den ligger i umiddelbar forlængelse af en klassisk sætning hos Euklid, der tilskrives Theaetetos: Der findes højst fem forskellige slags regulære polyedre (og Euklids elementer kulminerer netop med at vise at de rent faktisk findes ved at konstruere dem eksplicit. Det er netop Toulmins yndlingseksempel (Toulmin er selv uddannet som matematiker). I det klassiske bevis kigger Theaetetos på et hjørne af det regulære polyeder (alle hjørnerne er ens, så vi kan nøjes med at klassificere de mulige hjørner). Ved at udfolde hjørnet i et plan, fås en serie på mindst tre regulære polygoner, der grænser op til hinanden (med et hul imellem den første og sidste regulære polygon). Da en ligesidet trekant har vinklen 60° er der plads til 3, 4 og 5 trekanter i en sådan udfoldning, men ikke 6 ligesidede trekanter, da vinkelsummen rundt om toppunktet så ville give 360°. Da et kvadrat har vinklen 90° er der plads til 3 kvadrater i en sådan udfoldning, men ikke 4 kvadrater, da vinkelsummen rundt om toppunktet så ville give

360°. Da en regulær femkant har vinklen 108° er der plads til 3 regulære femkanter i en sådan udfoldning, men ikke 4 regulære femkanter, da vinkelsummen rundt om toppunktet så ville give 432°, hvilket ville overstige 360°. Og da vinklen i en regulær sekskant er 120° slutter festen her eftersom allerede 3 regulære sekskanter fører til vinkelsummen 360°. Der er altså netop 5 mulige regulære hjørner og dermed netop 5 mulige regulære polyedre.

Vi kan gengive argumentskemaet således tillempet efter Toulmin 1979:



Læg mærke til at Toulmin anerkender Euklids beviser som *sikre beviser*: Så længe vi bruger logisk deduktion indenfor rammerne af et anerkendt aksiomsystem er der ikke mulighed for gendrivelser.

Men når vi vender os mod Eulers polyedersætning (der egentlig går tilbage til Descartes): 'Summen af antallet af hjørner og antallet af sideflader minus antallet af kanter i et polyeder er altid 2' viser det sig historisk straks at være langt mere kompliceret end med Theaetetos bevis! Sætningen viste sig rent faktisk at være forkert: Den gælder netop *ikke* for alle polyedre, men nok for eksempelvis konvekse polyedre, og det viste sig undervejs at være yderst svært at give en simpel definition af hvad vi overhovedet forstår ved et polyeder. Toulmins argumentmodel er nu langt mere velegnet til at forstå processen bag matematikkens udvikling, som den foregår i den virkelige verden, end de traditionelle afpudsede lærebogseksempler.

Endelig er der faktisk indenfor matematikken en speciel disciplin - den teoretiske statistik – hvor man netop har specialiseret sig i at måle styrken af et argument, når man skal vælge to hypoteser, nulhypotesen og en alternativ hypotese. På basis af nulhypotesen kan man nemlig udregne eller estimere sandsynligheden for at frembringe et resultat, der er mindst lige så skævt som det rent faktisk observerede. En meget lav testssandsynlighed giver derfor en meget stærk styrkemarkør for at forkaste/gendrive nulhypotesen. I den teoretiske statistik er vi derfor netop vant til at operere med påstande, som vi ikke kan bevise, men kun sandsynliggøre, og hvor vi derfor er tvunget til at omgås styrkemarkører og gendrivelser på en kvalificeret måde.

Vender vi os nu mod den daglige undervisning så er det oplagt at der også i matematiktimerne forekommer mange dialoger, der bygger på argumenter, der med fordel kan analyseres ved hjælp af Toulmins argumentmodel. Da vi i 1g skulle introducere modellen på C-niveau, ønskede vi at finde et simpelt matematisk emne, der var umiddelbart tilgængeligt for eleverne og kunne lægge op til diskussioner. Valget faldt derfor på elementær talteori. Med lidt længere tid til rådighed kan man arbejde med et egentligt undersøgelseslandskab som foreslået af Philip J. Davis og Ruben Hersh i 'The Mathematical Experience' i afsnittet: 'The Creation of New Mathematics: An application of Lakatos Heuristic'. Men vi holdt os mere beskedent til at lege med lige og ulige tal og med kvadrattal, hvilket viste sig vanskeligt nok, da eleverne rent faktisk ikke er særligt fortrolige med disse begreber.

Vender vi os i stedet mod A-niveauet kan man som allerede antydet inddrage mere filosofiske aspekter af matematikken, herunder diskussionen om eksistensbeviser: Er det acceptabelt at slutte eksistensen af et matematisk objekt, hvis man ikke er i stand til at konstruere det? I forlængelse af det kan man også diskutere de begrænsninger, der ligger i logikken, som de kommer til udtryk i Gödels berømte ufuldstændigheds sætning. Det ligger i flot forlængelse af arbejdet med logiske gåder, og der findes mange tilgange til Gödels sætnigner og beslægtede emner fra den moderne logisk i Smullyans bøger. Endelig kan man diskutere status for de computerbeviser, der i de senere år er dukket op for forskellige centrale matematiske sætninger, fx firfarveproblemet, der indtil videre kun har kunnet bevises med meget udstrakt brug af computerstøtte, idet beviset er så komplekst med gennemgang af så mange mulige tilfælde, at det ikke er muligt at kontrollere tilfældene alene ved hjælp af menneskelig regnekraft. Man kan finde gode introduktioner til firfarveproblemet mange steder, fx i den fine artikel af Flovin Næs og Sandra de Blecourt: 'Matematik i alle regnbuens farver'. Man kan tilsvarende finde en diskussion af Toulmins argument model for firfarveproblemet i Aberdeins artikel: 'The uses of Argument'.

I forbindelse med indføringen af Toulmins argumentmodel i matematik er der endelig spørgsmålet om hvordan nøglebegreberne bør oversættes. I retorikbogen 'Praktisk argumentation' af Charlotte Jørgensen og Merete Onsberg, der kan anbefales som grundbog for alle der vil sætte sig ind i Toulmins argumentmodel, bruger man de traditionelle betegnelser:

Belæg – Hjemmel – Påstand

for den simple model og

Rygdækning – Styrkemarkør – Gendrivelse

for den udvidede model. De samme betegnelser benyttes i 'Fold dig ud i samfundsfaglige metoder' af Per Henrik Jensen og Torben Steiner Nielsen. De kan altså forekomme kanoniske. Men i andre nyere introduktioner kan man også møde alternative betegnelser, fx benytter 'Skriv i alle genrer' af Christian Kock og Birthe Tandrup termerne:

Argument/Belæg og Påstand/Standpunkt

ligesom 'Tal en tanke: Om klarhed og nonsens i tænkning og kommunikation' af Vincent F. Hendricks og Frederik Stjernfelt benytter:

Data/Belæg og Begrundelse/Hjemmel

Det er klart at der kan være forskellige grunde til at anvende alternative betegnelser indenfor forskellige fagområder. Men det er ikke ligegyldigt hvilke betegnelser vi vælger. Toulmin skriver selv i sin sammenfatning fra 2006:

> 'To add a final point: The success of *The uses of Argument* is largely due to the fact that I choose colloquial words (grounds, backings and so on) which everybody understands. So too did Aristotle. His "four causes" are the "from what", the "who did it", "the what sort is it" and "in aid of what". (The terms *essential cause*, *material cause*, *formal* and *final cause*, were mediaeval Latin introductions, which confused rather than elucidated his meaning.)'

Hvis vi vil sælge argumentmodellen til vores elever er det altså ikke ligegyldigt, hvilke ord vi vælger! Specielt ordet hjemmel er næppe et ord som umiddelbart genkendes af eleverne. Og selvom vi kan give gode huskeregler som 'en rejsehjemmel giver dig tilladelse til at rejse fra et sted til et andet på samme måde som en hjemmel giver dig tilladelse til at slutte fra belæg til påstand' er det et åbent spørgsmål om tidspunktet ikke er inde til i Toulmins ånd at finde en mere mundret oversættelse end 'Hjemmel' eller 'Bemyndigelse', der i dag udgør standardoversættelserne for den originale engelske betegnelse 'Warrant'.

Litteraturliste:

Madsen, S. (1992), *Oprør fra den udelukkede midte*, i "Udsagn – en mosaik om matematik", Matematiklærerforeningen.

Aberdein, A. (2006) *The uses of Argument in Mathematics*. Ch. 22 in Hitchcock, D. & Verheij, B. (Eds.) *Arguing on the Toulmin Model, New essays in Argument Analysis and Evaluation*. Springer.
Se også pdf-udgaven på nettet: http://arxiv.org/abs/math.HO/0504090

Lakatos, I., (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge: Cambridge University Press, London/New York
Eller uddrag på dansk:
http://www.henrikkragh.dk/hom/lmfk2002/lakatos2002.larger.pdf

Toulmin S.E., R.D. Rieke and A. Janik, (1979), *An introduction to reasoning*, Macmillan, New York

Davis, P. J. and Hersh,R. (1981), *The creation of New Mathematics: An application of Lakatos heuristic* Ch. 6 p. 291-297 in *The Mathematical Experience*. Pelican Books.

Smullyan, R. (1982), *Kvinden eller tigeren? – og andre opgaver i logik. Med en matematisk fortælling, der belyser Gödels geniale opdagelse*, Chr. Erichsens Forlag

Smullyan, R. (1987), *Forever undecided – A puzzle guide to Gödel*, Oxford University Press.

Næs, F.T og Danelund, L., (2007), *Matematik i alle regnbuens farver*, bilag 1 til et oplæg om et studieretningsprojekt i matematik og filosofi:
http://www.math.ku.dk/formidling/studieretningsprojekter/filer/Mat_filosofi/Matematiske_beviser/Matematiske_beviser.doc

Toulmin, S.E. (2006) *Reasoning in theory and practice*. Ch. 2 in Hitchcock, D. & Verheij, B. (Eds.) *Arguing on the Toulmin Model, New essays in Argument Analysis and Evaluation*. Springer.