弯管制作中的数学建模和函数拟合

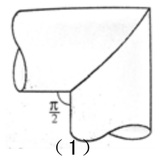
——TI-83 Plus 计算器的回归分析功能

大同中学　平容旎

观察一下身边的烟道、铁门、广告牌等，是否用到各种弯管？制作这类弯管时，通常先在平面材料上剪裁出展开图，再合拢、拼接出弯管。

我们将要动手制作如图（1）所示的圆柱弯管。

准备好一张 16K 的纸，一个薯片罐，TI-83 计算器。



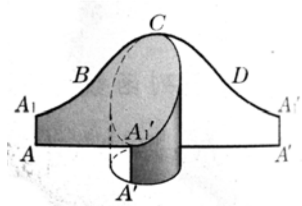
（1）

【探究一】

斜截薯片罐一分为二，要确保斜截面是平面。可以将斜截面置于桌面来检验，若截口与桌面没有空隙则为平面。

把其中一个斜截圆柱的侧面剪开并摊平，如图（2）所示。

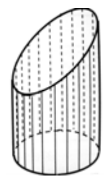
要画出这个斜截圆柱的侧面展开图，关键在于截口轮廓线，也就是图（2）中的曲线 A_1BCDA_1'。



（2）

猜测曲线 A_1BCDA_1' 是什么曲线？抛物线？圆弧？正弦函数？或者是其它类型的曲线？

以下是小张同学利用 TI83 计算器做的一个函数拟合



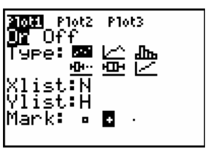
步骤一：将圆柱底面的圆周十六等分；

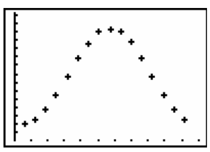
步骤二：从每个等分点画一条与底面垂直的直线，在截口轮廓线上找到与每个等分点对应的点；

步骤三，依次测量每个等分点与其对应点之间的距离，得到以下一组数据：

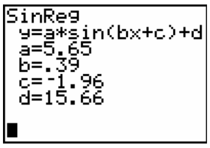
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
h	10	10.4	11.7	13.5	15.7	17.8	19.6	20.9	21.3	20.9	19.7	17.8	15.7	13.5	11.7	10.5

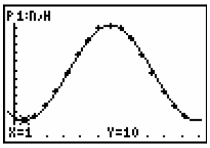
步骤四：创建 n、h 两个数组，并以 n 为 $Xlist$，以 h 为 $Ylist$ 作出离散图；

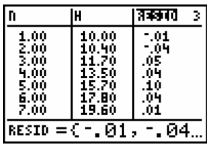




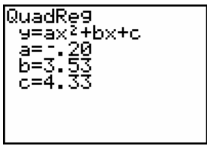
步骤五：用正弦函数模型拟合这两个数组

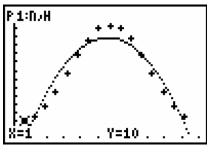


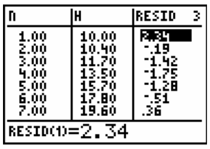




你也可以参照以上步骤，做其它函数模型（如二次函数）的拟合。







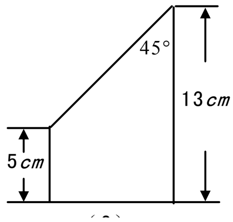
比较不同拟合的图像和误差，来检验你的猜测。

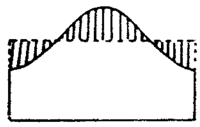
【探究二】

拟合实验表明，斜截圆柱的截口轮廓线符合函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)+B$。

（该函数的推导过程参见附一，其中用到高二的立体几何知识）

那么参数 A、B、ω、φ 与弯管的形状和大小有什么关系？





例：图（3）是一个斜截圆柱的侧视图，根据所给出的条件，则拼接制作这样一个斜截圆柱需要多少面积的材料？

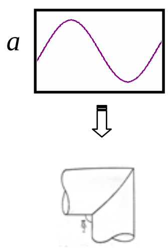
解：侧面展开后，截口轮廓线是一个周期的正弦函数曲线

根据正弦函数的对称性，展开图割补成矩形

长为底面周长 8π，高为 $\dfrac{5+13}{2}=9$

∴ 需要 $72\pi\ cm^2$ 的材料

例：如图（4）所示，裁剪一张 $a \times b$ 大小的矩形纸张，拼接出一个圆柱直角弯管，试求截口轮廓线的正弦函数解析式。



（4）

（分析）　参数 B、φ 对曲线的形状没有影响，仅与曲线横向、纵向的位置有关，可忽略不计。因此只需求解函数 $y = A\sin\omega x$

解：$\because\ T=\dfrac{2\pi}{\varpi}=b \quad \therefore\ \varpi=\dfrac{2\pi}{b}$

又 $\because\ 2A=d$　底面直径 $d=\dfrac{b}{\pi}$　　$\therefore\ A=\dfrac{d}{2}=\dfrac{b}{2\pi}$

$$\therefore\ y=\frac{b}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{b}\quad x\in[\,0\,,b\,]$$

【实践】

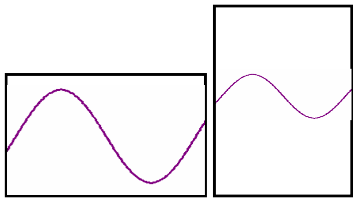
用一张 16K 纸（19.5×27 厘米）制作一个圆柱直角弯管，要使其容积最大，如何裁剪、拼接？

请给出设计方案、明确制作步骤。

参考方案

- 裁剪出的展开图合拢后得到两个斜截圆柱。正弦函数曲线围成一椭圆，两个不同角度拼接，分别成圆柱和弯管，两者等积。

  设 $a=19.5$，$b=27$

  若以 a 为底面圆周，则体积 $V_1=\pi\cdot(\frac{a}{2\pi})^2\cdot b=\frac{1}{4\pi}a^2b$

  若以 b 为底面圆周，则体积 $V_2=\pi\cdot(\frac{b}{2\pi})^2\cdot a=\frac{1}{4\pi}b^2a$

  $\because\ a<b\quad\therefore\ V_1<V_2$

  所以，以矩形较长的一边为底边体积大。

- $y=\frac{27}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{27}\approx4.30\sin0.23x\quad x\in[\,0\,,27\,]$

- 用描点法画函数 $y=4.30\sin0.23x$

  可以借助 TI83 计算器的 TABLE 取点

- 裁剪，拼接

  正弦函数的曲线是轴对称图像，因而可以只画半个周期的曲线，对折裁剪

【探究三】

1） 裁剪一张 $a\times b$ 大小的矩形纸张，拼接一个圆柱弯管，弯管的夹角为 θ（$0<\theta<\pi$），截口轮廓线的正弦函数解析式是什么？

2） 裁剪一张 $a\times b$ 大小的矩形纸张，拼接一个弯管，如何设计截面形状和弯管夹角可使弯管体积最大？

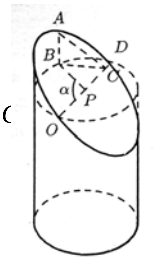
通过猜测、拟合验证，我们探究了斜截圆柱的截口轮廓线的数学模型（即三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$），也可以用立体几何知识来严格证明。利用这个结论，我们可以完成“弯管制作”这一实践课题。

斜截圆柱中还蕴藏着其它奇妙的数形问题，有待我们做进一步探究。

二期课改教材在每一章节都配以课题，希望同学们能潜心研究，必有所得。

附一

求证：直角圆柱弯管，截口轮廓线的解析式为 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$.



证明：椭圆形截面与底面平行面交于直线OD

过轮廓线上任一点A，作AB垂直底面于B，作$BC \perp OD$于C，连AC

由二面角平面角可知，$\angle ACB = 45^\circ$

若 $\angle OPB = \alpha$，则 $BC = r\sin\alpha$，其中 $OB = \alpha \cdot r$

等腰 ΔABC 中，$AB = BC$，

所以， $AB = r\sin\alpha = r\sin\dfrac{OB}{r}$，即截口轮廓线的解析式为 $y = A\sin\omega x$

附二（探究三参考答案）

1） $y = \dfrac{a\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi x}{a}$

2）底面为圆形时面积最大，弯管夹角大小不影响体积。所以，圆柱弯管体积最大。

参考资料：

- 二期课改数学课本（高一第二学期），课题三“制作弯管”；
- TI 数理技术教材

大同中学 平蓉旎