图形计算器在数列学习中的作用初探

华东师范大学第一附属中学　区志华

随着社会的进步和信息技术的迅猛发展，数学的研究领域、研究方式、应用范围等方面，都得到了空前的拓展。数学的内容、思想、方法和语言也日渐融入社会生活，成为人们认识世界、从事工作和学习的必要工具。当前的上海数学教育改革，努力使现代信息技术，成为学生学习的有效手段和工具，成为获取学习资源和开展学习交流的广阔平台。

《上海市中小学数学课程标准（试行稿)》提出：大力推进基于现代信息技术的数字化数学活动（DIMA)，建立以计算机、计算器（包括科学计算器、函数型计算器和图形计算器）为支撑、拥有智能软件和丰富课件、联接信息网络的 DIMA 平台。利用该平台，改善数学内容的处理方式和呈现方式，让学生在信息技术环境下自主学习，进行实验、探索和研究。

图形计算器的各项功能与数学教学内容的联系密切，十分便于学生进行直观体验、形象解答、猜想归纳和探索实践，而且可以实现情境问题的现实化，解决途径的多样化和学习过程的活动化。

以数列学习为例，数列不仅是数学的基础知识之一，蕴含着类比、猜想、归纳、递归等丰富的数学思想方法，而且数列知识在日常生活、社会实践中有着广泛的应用。因此，将图形计算器技术运用于数列的学习过程，借助图形计算器的图像、表格及递推公式的直接运用等技术特点，使学生在有效的尝试猜想、合理归纳、简化运算、验证运算中，体验公式的认知过程，领会其中的数学思想方法，提高问题处理的能力。

一、图形计算器可以成为学生提高认知的工具

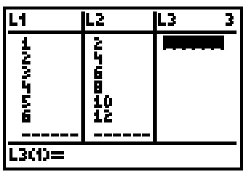
数列的基础学习涉及数列及等差、等比数列的有关概念和公式，而这些都是从具体实例出发，如何正确理解这些从具体到抽象的数列内容呢？我们可以借助图形计算器的数列模式 **z** 中，关于数列的编辑 **o**、图像 **r**、数组和函数回归 **…** 等技术手段，用直观、形象的方式，通过列举、归纳、猜想、验证及演绎证明，实现对数列有关概念、公式的认识与理解。

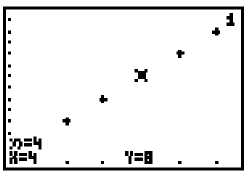
[例１] “数列是按一定次序排列起来的一列数”的认识与理解过程。

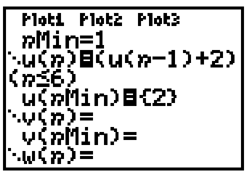
（1）数列可以用列举（列表）、图像、递推公式及通项公式表示。

例如，数列 2，4，6，8，10，12。

列 表　　　　图　像　　　　递 推 公 式　　　　通 项 公 式



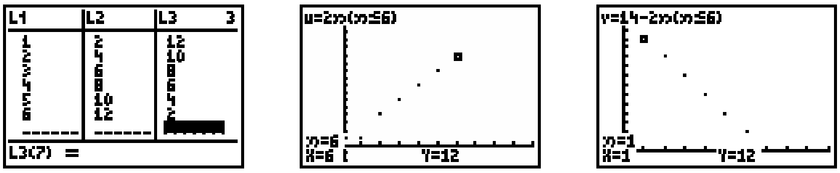




（2）一个数列是要强调排列的次序性的。

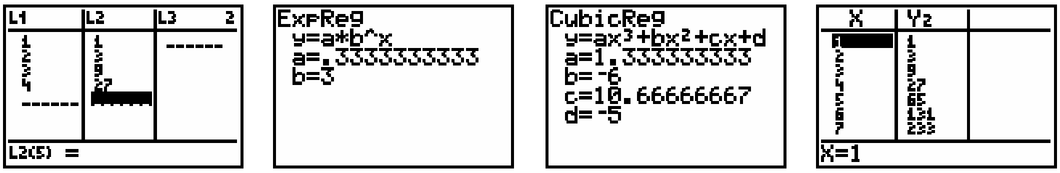
例如，数列 12，10，8，6，4，2，它在列表、图像或者通项公式表示方式中，都显然是与数列 2，4，6，8，10，12 不同的数列。

数列 2，4，6，8，10，12　　数列 12，10，8，6，4，2



（3）如果仅已知一个数列的若干项，那么该数列的通项公式是不能唯一确定的。

例如，已知数列$\{a_n\}$的前 4 项为 1，3，9，27，可猜测它的通项公式为 $a_n=3^{n-1}$。同样，前 4 项为 1，3，9，27 的数列$\{a_n\}$，也适合通项公式$a_n=\frac{4}{3}n^3-6n^2+\frac{32}{3}n-5$。

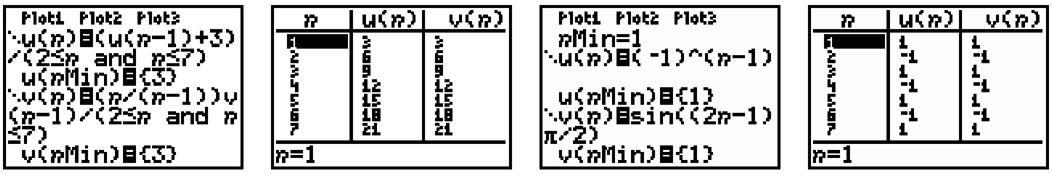


（4）如果已知一个数列，那么该数列的递推公式或通项公式也不是唯一的。

例如，数列$\{a_n\}$的各项是 3，6，9，12，15，18，21，它的递推公式可以是

$$\begin{cases}a_1=3,\\ a_n=a_{n-1}+3\ \ (2\le n\le 7)\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}a_1=3,\\ a_n=\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}(2\le n\le 7);\end{cases}$$

又如，数列$\{a_n\}$ $(n\in N^*)$ 的奇数项都是 1，偶数项都是-1，它的通项公式可以是 $a_n=(-1)^{n-1}$ ，或者是$a_n=\sin\frac{2n-1}{2}\pi$。



对于一个数列而言，如果已知该数列的通项公式或递推公式，那么其各项的数值是唯一确定的。因此，在学习数列时，要重视数列的通项公式、递推公式的理解与正确运用。

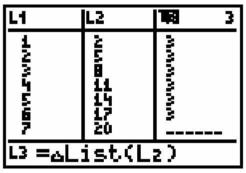
[例 2］ 等差数列通项公式导出的学习过程。

等差数列$\{a_n\}$中，不妨取首项为$a_1=2$、公差为$d=3$（每个学生可以取不同值），经过列举、猜想、推测其递推公式为$\begin{cases}a_1=2,\\ a_n=a_{n-1}+3\ \ (n\ge 2),\end{cases}$ 归纳并验证数列$\{a_n\}$的通项公

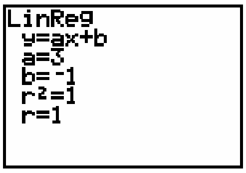
式为 $a_n = 3n-1$，再改写为一般形式 $a_n = 2+(n-1)\times 3 = a_1+(n-1)d$，并加以证明。

列 举

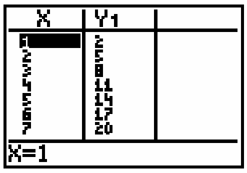
推 测



归 纳



验 证



从中，还可以知道，等差数列的通项公式的图像是一条直线，且当公差为非零时，等差数列的通项公式是自然数 n 的一次函数。

同样，关于等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，也可以采用类似的方法学习。

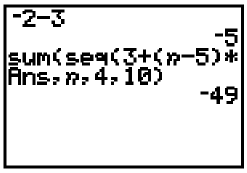
二、图形计算器可以拓展学生探索问题的途径

数列问题是源自于社会生活，又是在社会生活中有着广泛的应用，因此，数列学习应在理解基本知识的基础上，正确运用数列知识，培养分析问题、解决问题、探索问题的能力。以往我们一般是通过演绎的方式，进行传授式教学，现在我们可以借助图形计算器的各项功能，采用直观体验、协作分析、猜测探究等方式，结合演绎论证，使学生自主地进行问题解决和实践探索的学习。其中，利用图形计算器的直观运算、图表功能，与传统的演绎论证，两者之间既要相互区别，又要相互补充，应当形成一个新的思维过程。

［例 3］已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5 = 3$，$a_6 = -2$，

求 $a_4 + a_5 + \cdots\cdots + a_{10}$ 的值。

（2003 年上海市高考数学试题）

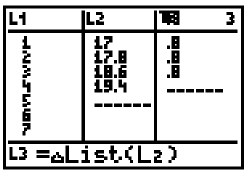


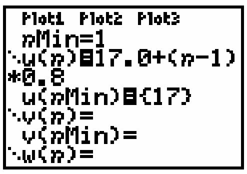
［例 4］某小区的绿化建设有如下统计数据:

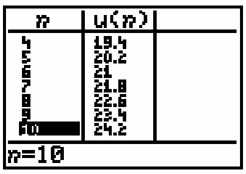
年　　份	1996	1997	1998	1999
绿化覆盖率（%）	17.0	17.8	18.6	19.4

如果以后的几年继续依此建设速度发展绿化，那么到哪一年该小区的绿化覆盖率可以超过 23.4% 。（课本的例题）

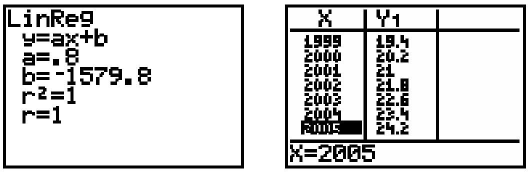
根据已知数据，可以推断：1996 年以来的绿化覆盖率（%）组成了以 17.0 为首项，公差为 0.8 的等差数列，并由此可得 2005 年起小区的绿化率超过 23.4% 。







而利用图形计算器的回归功能，则可以直接获得直线型拟合函数，确认 1996 年以来的绿化覆盖率组成等差数列，从而可得超过 23.4%的年份为 2005 年。



［例 5］ 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{3}$（$n\in Z^+$），求使不等式

$|a_{n+1}-a_n|<10^{-9}$成立的最小正整数n.

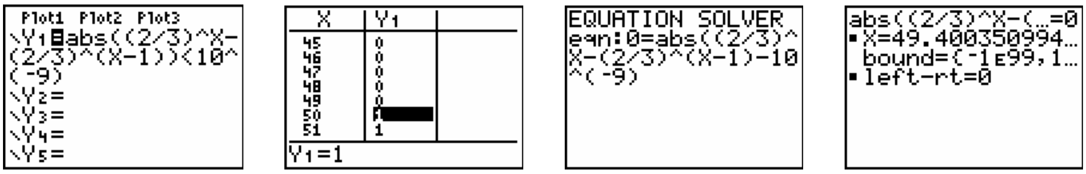
(2005 年上海市 TI 杯高二年级数学竞赛个人赛题)

一般地，由题设递推公式得到数列的通项公式$a_n=1+(\dfrac{2}{3})^{n-1}$，再计算不等式得最小正整数$n=50$.

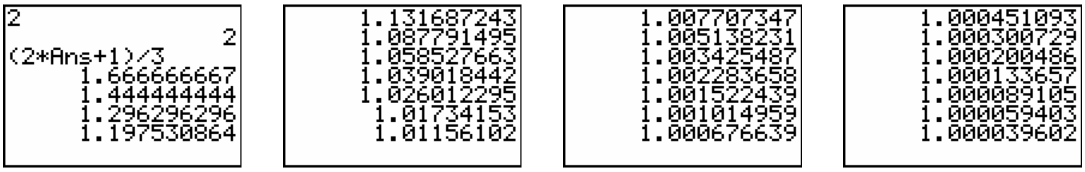
而基于图形计算器的学生，可以充分利用了图形计算器的技术手段，既有介于演绎与技术之间的，又有直接利用技术的。

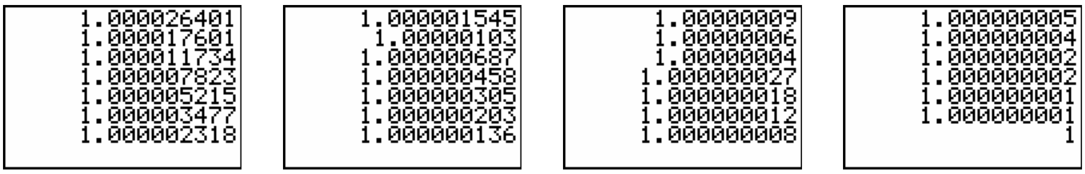
其一，在获得通项公式$a_n=1+(\dfrac{2}{3})^{n-1}$后，利用图形计算器解不等式的；

① 利用逻辑运算的解法　　　　② 利用方程求解器



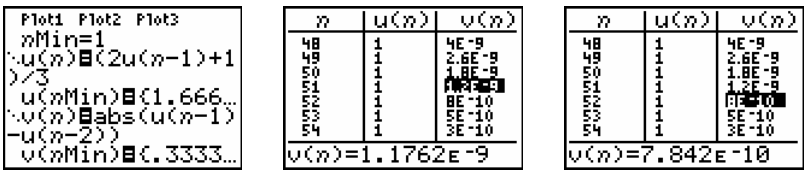
其二，由递推公式，借助函数或图形计算器，算得$|a_{51}-a_{50}|<10^{-9}$，即$n=50$；



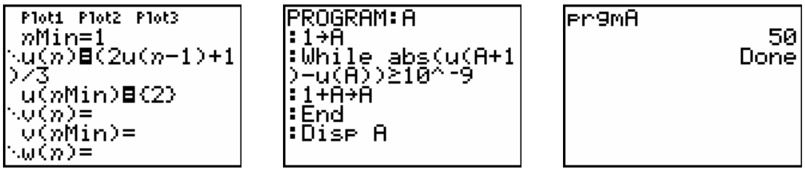


其三，用图形计算器数列编辑器，建立：$U(n)=(2U(n-1)+1)/3$，$U(1)=\{\dfrac{5}{3},\ 2\}$；

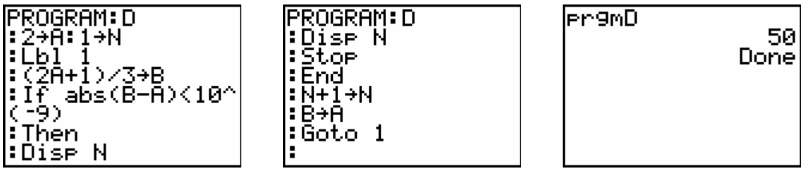
$V(n)=abs(V(n-1)-V(n-2))$，$V(1)=\{\dfrac{5}{3}-2\}$，得$|a_{51}-a_{50}|<10^{-9}$，即$n=50$；



其四，用图形计算器编程功能，直接计算得$n=50$.



或者



从这个问题的解决可以看到，基于图形计算器的数学学习，可以充分开拓学生的思路，让学生在不同的算法中，寻求适合自己的正确算法，从而提升学生的思维品质。

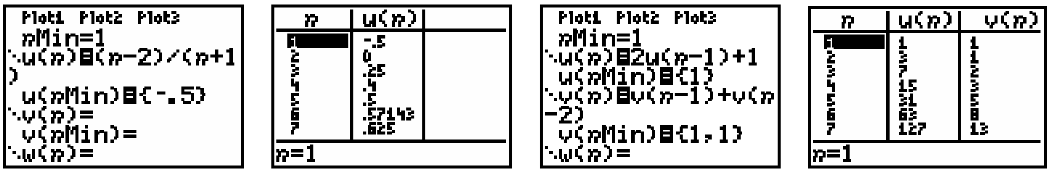
三、图形计算器帮助学生体会数学思想方法

1、熟悉“递归”思想

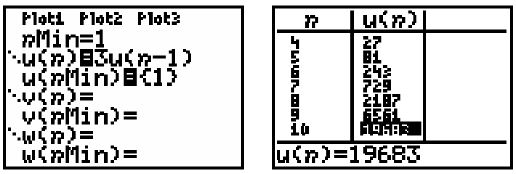
我们知道通项公式和递推公式都可以用于表示一个数列，但通项公式强调数列的项与项数之间的关系，递推公式则是表示相邻两项之间的关系式，因此，通常对于给定项数求数列的项时，通项公式较递推公式方便一些，而对于图形计算器，两者的表示方式是一样的。

例如，根据以下数列的通项公式，写出它的前 7 项。（课本的例题）

（1）$a_n=\dfrac{n-2}{n+1}$；（2）$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=2a_{n-1}+1\ \ (n\geq2) \end{cases}$；（3）$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=1 \\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ \ (n\geq3) \end{cases}$.



又如，课本中提到的谢尔宾斯基三角形中，白色三角形的个数依次构成的一个数列 1，3，9，27，81，......。试推测：该数列的第 6 至 10 项分别是多少？



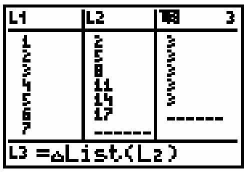
这样，递推公式不仅可以得到充分体现，而且更能为学生所体验与应用。

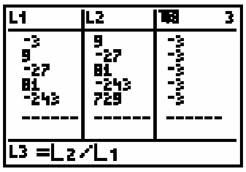
2、学会“类比”方法

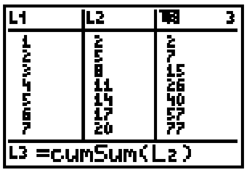
无论新旧教材，课本在编写等差数列和等比数列内容时，都是利用两者在形式上有着许多相似之处，采用类比的思想方法，使学习者在知识的认知上进行迁移，而且这两种数列在解决问题的方法上，也有着许多可作类比之处。

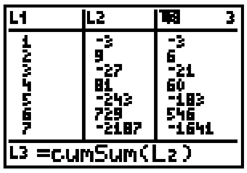
例如，等差、等比数列，等差、等比数列的通项公式导出过程（例 2），等差、等比数列的前 n 项和的计算方法等，都是可以通过“类比”思想加以理解与掌握。

概 念 理 解　　　　求 和 计 算









［例 6］ 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^t+2^s \mid 0\le s<t,\ s、t\in Z\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列，即 $a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=6$，$a_4=9$，$a_5=10$，$a_6=12$，……。将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大、左小右大的原则写成三角形数表：

3

5 6

9 10 12

_ _ _ _

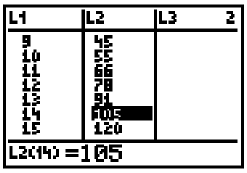
_ _ _ _ _

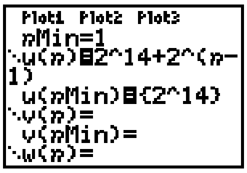
……………

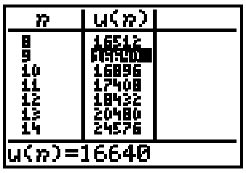
第（2）小题：求 a_{100} 的值；

第（3）小题：设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^t+2^s+2^r \mid 0\le r<s<t,\ r、s、t\in Z\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列，已知 $b_k=1160$，求 k 的值。　　（2003 年全国高考数学试题选）

首先，利用图形计算器数组功能，在 L1 中建立自然数数列，在 L2 中执行 cumSum（L1），即数列 $\{a_n\}$ 项数数列。则第 14 行结束共有 105 项，即 $a_{100}=2^{14}+2^8=16640$。







其次，用数列学习中常见的“类比法”，将数列 $\{b_n\}$ 依次排成：

第 1 组 $\underline{2^2+2^1+2^0=7}$；

第 2 组 $\underline{2^3+2^1+2^0=11}$，

$\underline{2^3+2^2+2^0=13，2^3+2^2+2^1=14}$；

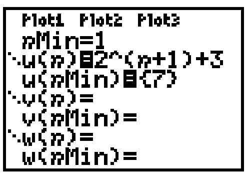
第 3 组 $\underline{2^4+2^1+2^0=19}$，

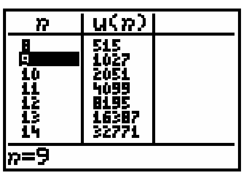
$\underline{2^4+2^2+2^0=21，2^4+2^2+2^1=22}$，

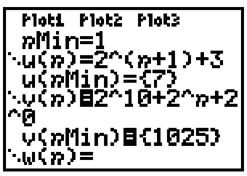
$\underline{2^4+2^3+2^0=25，2^4+2^3+2^1=26，2^4+2^3+2^2=28}$；

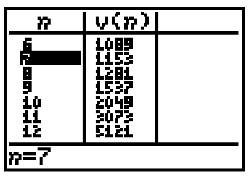
……………………………………………………。

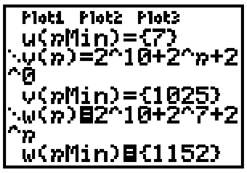
由此推测第 n 组第 1 行第 1 个数是 $2^{n+1}+2^1+2^0=2^{n+1}+3$，即 $2^t+2^s+2^r$ 是表示第 $t-1$ 组第 s 行第 $r+1$ 个数，则计算得到：第 n 组有 $1+2+3+\dots\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个数。

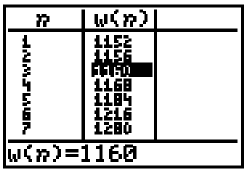


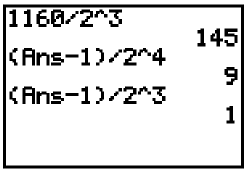




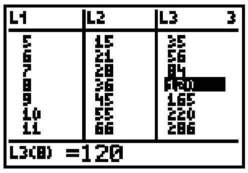






或者


因为$b_k = 1160 = 2^{10} + 2^7 + 2^3$，即$b_k$是第 9 组第 7 行的第 4 个数，利用图形计算器数组功能，在 L1 中建立自然数数列，在 L2 中执行 cumSum（L1），在 L3 中执行 cumSum（L2），即 L3 是数列$\{b_n\}$项数数列。从中可以看到至第 8 组，共有 120 项，再至第 9 组第 6 行止，共有 120 + 21 = 121 项，所以，位于第 9 组第 7 行第 4 个数的b_k是数列$\{b_n\}$中的第 145 项，即$k = 145$。



显然，在正确理解、合理应用课本内容所体现的“类比”方法时，图形计算器可以帮助我们呈现和运算。

3、“猜想、归纳”思想方法的应用

对于一个具体的问题，可能需要通过观察、分析、抽象、归纳，将问题从特殊到一般，合理猜想可能的结果，探索可能的规律，然后通过演绎推理证实猜想的结果，或者事实验证结果的合理性。这不仅可以培养学生的思维能力，而且可以了解科学探索的一个基本方法。而基于图形计算器的学习，我们可以通过数据处理和回归功能，实现“猜想、归纳”思想方法在数列学习及解决实际问题中的应用。

例如，美国 UCSMP 教材之一《函数、统计与三角学》的一则练习：

美国 1790 年至 1860 年间，每十年普查人口一次，数据如下表：

年份	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
人口数	3929214	5308483	7239881	9638453	12866020	17069453	23191876	31444321

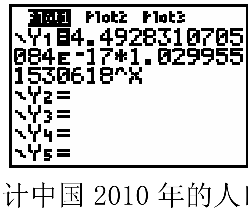
根据历史记载，林肯总统曾据此表预测，美国 1930 年人口为二亿五千万。你试据此表作出你自己的估计。

我们利用图形计算器的回归功能，进行如下估计，确认林肯总统的预测是基本正确的。

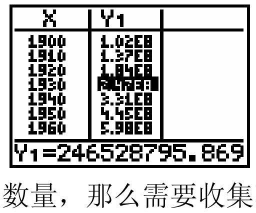
建立数组

选择回归

拟合函数



近似估计



由此，我们可以再设问：如果我们需要估计中国 2010 年的人口数量，那么需要收集哪些数据作为你的预测依据呢？如何收集，怎样预测呢？

通过上述问题的探讨，我们可以认识到，数列作为一个重要的数学内容，为学生预测、探索事物的变化趋势、联系生活体验数学等方面提供了知识基础，而图形计算器可以作为开展这些方面数学活动的工具，为学生拓展解决数学问题的途径、体验数学知识与数学思想等

提供了技术基础。如果我们能够有效、合理地将图形计算器融入数列的学习过程中，充分利用基于图形计算器技术的数学学习所带来的课堂氛围的改变，让图形计算器技术实现对数列问题的直观感知，数列知识用于完成对该问题的思辨论证，那么数学学习将充满乐趣、体现个性、自主探索，真正做到“以学生发展为本”。