利用 TI 图形计算器探索参数范围的求解问题

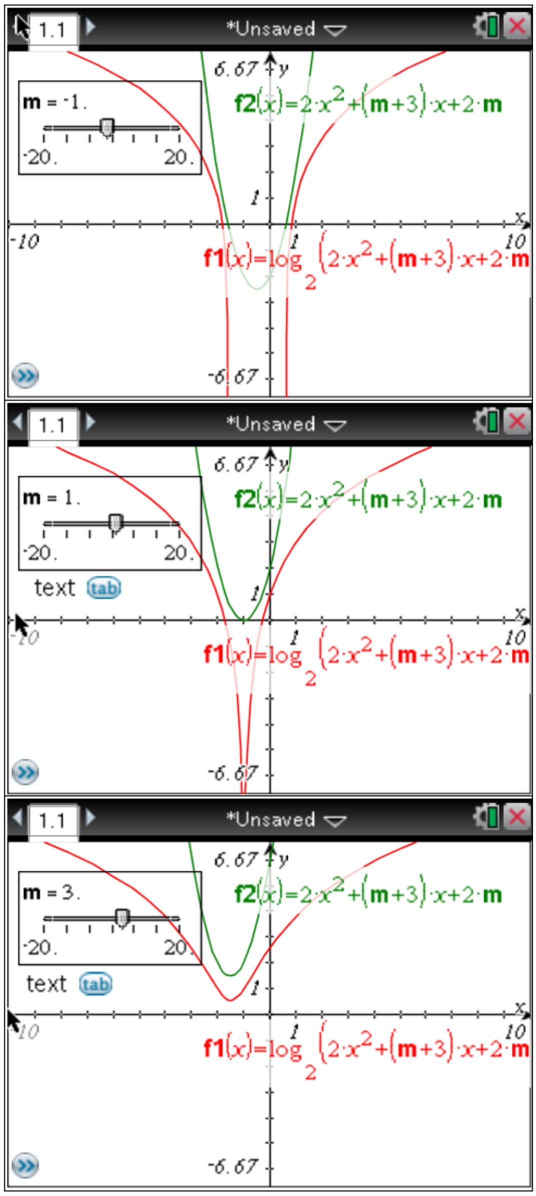
邓军民　（广州市第二中学数学科）

【本文发表于《中国数学教育》2012 年第 1 期】

摘要：TI 图形计算器具有数据处理功能、函数功能、图形功能、简单编程功能和进行一些数理实验功能，是教学、学习和做数学研究的强有力的辅助工具，为高中新课程改革注入了新的活力．参数范围的求解问题能考查学生对各知识点进行渗透及综合分析问题的能力，达到为高校选拔人才的目的．

关键词：图形计算器；参数范围；数形结合；分类讨论

TI 图形计算器是美国德州生产的一种立足于数学、教学、教师和学生的高端计算器，它具有数据处理功能、函数功能、图形功能、简单编程功能和进行一些数理实验功能，是教学、学习和做数学研究的强有力的辅助工具．它为数学思想与方法提供了可视化的图像，使组织和分析数据变得更加直观、简单，更重要的是 TI 图形计算器具有便携性和灵活性，这为数学问题的探究以及数学教学提供了便利，为高中新课程改革注入了新的活力．而利用函数、导数、不等式、方程等知识设计参数范围的求解问题成为近几年高考的热点，这类问题往往在知识的交汇点上命题，能考查学生对各知识点进行渗透及综合分析问题的能力，达到为高校选拔人才的目的．下面笔者利用 TI 图形计算器（机型：TI－Nspire™ CX CAS 中文彩屏机）探索一下参数范围的求解问题．



一、值域问题与参数的取值范围

例 1． 已知函数 $f(x)=\log_2[2x^2+(m+3)x+2m]$，若 $f(x)$ 的值域为 R，求实数 m 的取值范围．

【作图探究】按如下步骤操作：

S1　按 ctrl doc 2 添加一个图形页面；

S2　按 menu 1 A 插入游标 m，设定范围为 $-20\sim20$；

S3　作出函数 $f_1(x)=\log_2[2x^2+(m+3)x+2m]$ 与函数 $f_2(x)=2x^2+(m+3)x+2m$ 的图像．

【动态解析】拖动游标 m，观察 m 的变化与值域的变化的规律．显示结果如右图．可以很直观地看到，当 $f(x)$ 的值域为 R 时，$f_2(x)$ 的图像（抛物线）与 x 轴刚好有交点，所以有 $\Delta=(m+3)^2-4\times2\times2m\geq0$，解得 $m\leq1$ 或 $m\geq9$，因此实数 m 的取值范围为 $(-\infty,1]\cup[9,+\infty]$．

【简要评注】此题要深刻理解对数函数的定义，审题思路要清晰、严谨，这是解决此题的关键．对数函数的值域为 R，

说明其真数 $f_2(x)$ 要取遍 $(0,+\infty)$ 的任何数，所以 $(0,+\infty)$ 一定要是 $f_2(x)$ 的值域的子集，所以只需 $f_2(x)$ 的图像与 x 轴有交点即可．同时由此题我们还可以得到如下结论：若 $f(x)$ 的定义域为 R，则 $\Delta<0$，解得 $m\in(1,9)$．

二、不等式问题与参数的取值范围

例 2. 若函数 $f(x)=x^2-a^x(a>0,a\neq 1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时均有 $f(x)<\dfrac{1}{2}$，则实数 a 的取值范围为（　）

A．$(0,\dfrac{1}{2})$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$[\dfrac{1}{2},1)\cup(1,2]$　　D．$(0,\dfrac{1}{2})\cup(2,+\infty)$

【作图探究】按如下步骤操作：

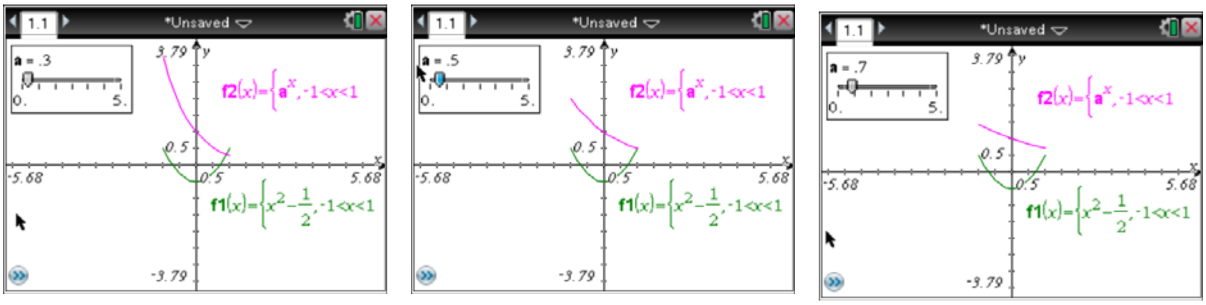
S1 按 ctrl doc▾ 2 添加一个图形页面；

S2 按 menu 1 A 插入游标 a，设定范围为 $0\sim10$；

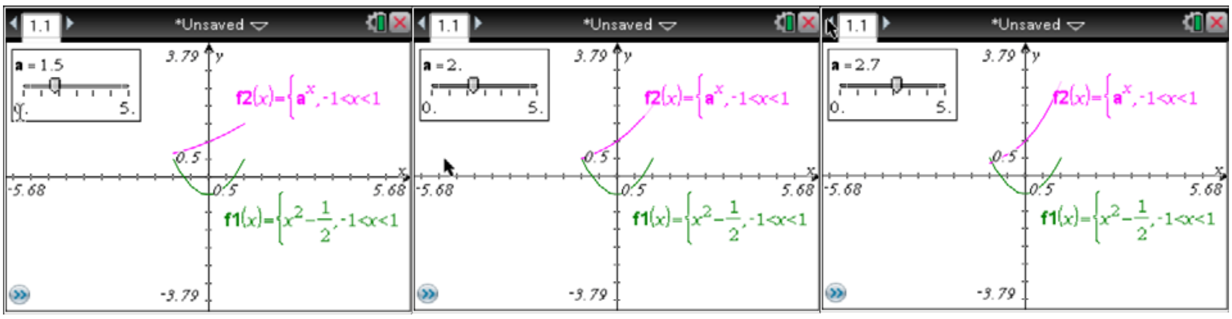
S3 作出函数 $f_1(x)=x^2-\dfrac{1}{2}(-1<x<1)$ 与

$f_2(x)=a^x(-1<x<1)$ 的图像．

【动态解析】拖动游标 a，观察 a 的变化与两函数图像位置高低的变化．



由上图可以很直观地看到，当 $a\in(0,1)$ 时，只需 $f_1(1)\le f_2(1)$ 即可，解得 $a\in[\dfrac{1}{2},1)$；



由上图可以很直观地看到，当 $a\in(1,+\infty)$ 时，只需 $f_1(-1)\le f_2(-1)$ 即可，解得 $a\in(1,2]$．

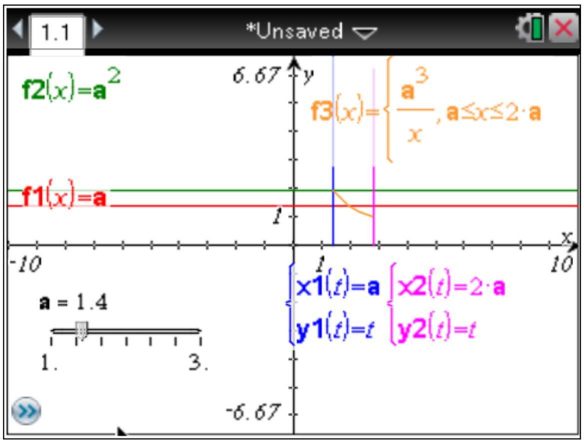
综上所述，实数 a 的取值范围为 $[\dfrac{1}{2},1)\cup(1,2]$．

【简要评注】解决一些比较复杂的函数的值域问题，往往可以将问题转化为两个新的初等函数的函数值大小比较问题，考虑到初等函数图像大家都比较熟悉，我们再利用数形结合的数学思想，进一步去探究两个初等函数图像之间的位置关系，就可以找到解决问题的突破口．

三、方程问题与参数的取值范围

例 3． 设 $a>1$，若对于任意的 $x\in[a,2a]$，都有 $y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=3$，这时 a 的取值集合为

（A）$\{a\,|\,1<a\le 2\}$　　（B）$\{a\,|\,a\ge 2\}$　　（C）$\{a\,|\,2\le a\le 3\}$　　（D）$\{2,3\}$



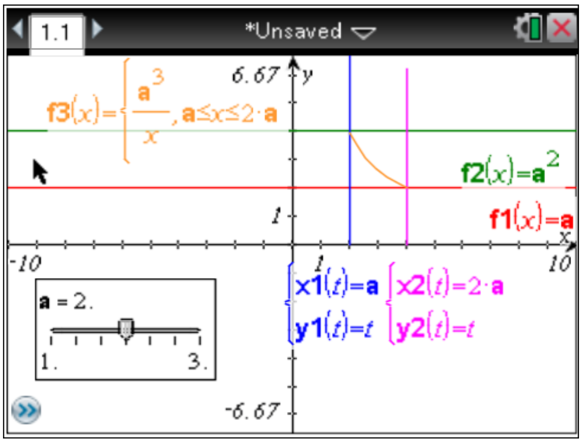
【作图探究】按如下步骤操作：

S1　按 ctrl doc▾ 2 添加一个图形页面；

S2　按 menu 1 A 插入游标 a，设定范围为 $1\sim3$；

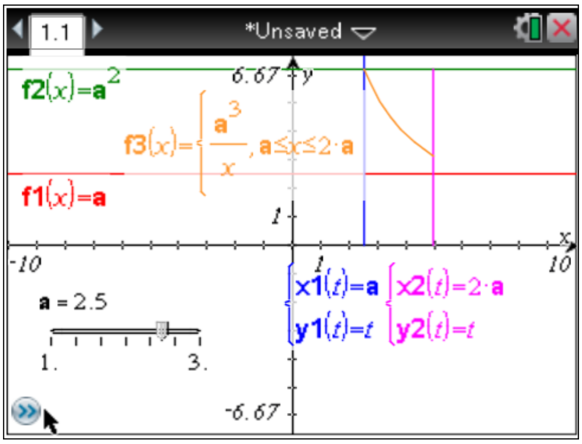
S3　作出函数 $x=a$、$x=2a$、$y=a$、$y=a^2$ 的图像，这四条直线围成的封闭图形为一个矩形；

S4　将方程等价变形得 $y=\dfrac{a^3}{x}(a\le x\le 2a)$，作出该函数的图像．



【动态解析】拖动游标 a，观察右边图像知：

当 $a\in(1,2)$ 时，$y=\dfrac{a^3}{x}(a\le x\le 2a)$ 有一部分图像落在矩形的外部；当 $a\in[2,+\infty)$ 时，$y=\dfrac{a^3}{x}(a\le x\le 2a)$ 的图像都落在矩形的内部及边界．



其实，考虑到函数 $y=f(x)=\dfrac{a^3}{x}(a>1)$ 在 $[a,2a]$ 单调递减，所以只需 $[f(2a),f(a)]\subseteq[a,a^2]$，

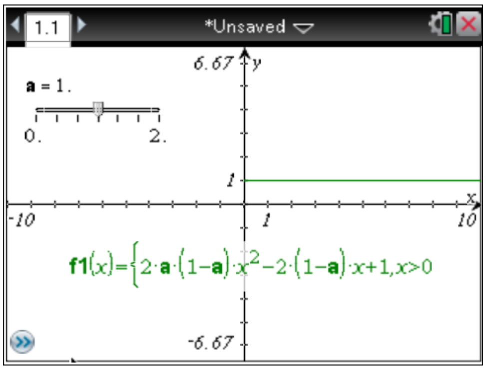
即 $[\dfrac{a^2}{2},a^2]\subseteq[a,a^2]$，所以 $\begin{cases}\dfrac{a^2}{2}\ge a\\ a>1\end{cases}$，解得 $a\in[2,+\infty)$．

【简要评注】将方程相关的问题转化为函数的值域问题，不失为一种好方法．对于此题，部分学生容易误认为函数

$y=\dfrac{a^3}{x}(a\le x\le 2a)$ 的值域就是 $[a,a^2]$，这是本题的一个易错点．所以本题的一个重要突破口就是要通过推理得到该函数的值域是 $[a,a^2]$ 的一个子集，这样就可以达到一个“山穷水尽疑无路，柳暗花明又一村”的解题效果．

四、函数的单调区间与参数的取值范围

例 4.（2011 年高考数学广东卷文科第 19 题）设 $a>0$，讨论函数 $f(x)=\ln x+a(1-a)x^2-2(1-a)x$ 的单调性．



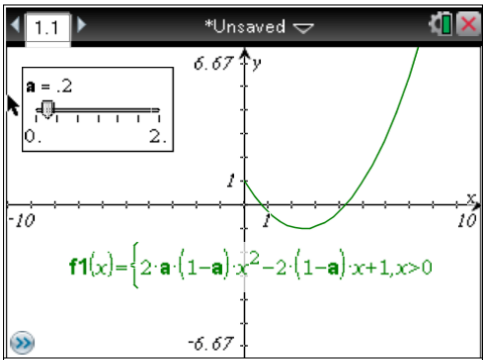
【作图探究】因为 $f'(x)=\dfrac{2a(1-a)x^2-2(1-a)x+1}{x}(x>0)$，

按如下步骤操作：

S1 按 ctrl doc▾ 2 添加一个图形页面；

S2 按 menu 1 A 插入游标 a，设定范围为 $0\sim 2$；

S3 作出 $f_1(x)=2a(1-a)x^2-2(1-a)x+1(x>0)$ 的图像．



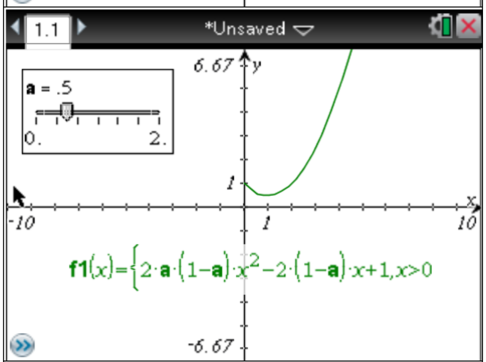
【动态解析】拖动游标 a，考虑到 $x>0$，观察右边图像知：

（1）当 $a=1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}>0$，∴ $f(x)$ 在（0，+∞）是增函数；

（2）当 $a\ne1$ 时，设 $f_1(x)=2a(1-a)x^2-2(1-a)x+1(x>0)$，

①当△≤0 时，即 $\dfrac{1}{3}\le a<1$ 时，$2a(1-a)>0$，$f_1(x)\ge0$，

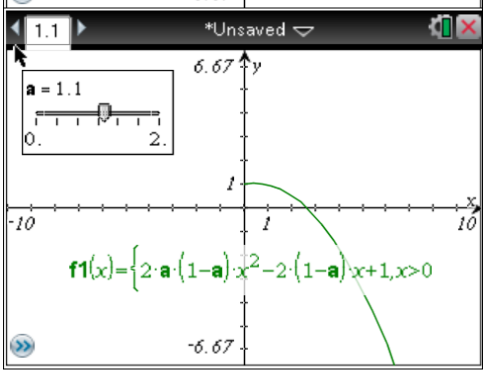
即 $f'(x)\ge0$，∴ $f(x)$ 在（0，+∞）是增函数；



②当△>0 时，即 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 或 $a>1$，

令 $f_1(x)=0$ 得，$x_1=\dfrac{1-a-\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$，

$x_2=\dfrac{1-a+\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$，



当 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 时，$2a(1-a)>0$，$0<x_1<x_2$，

由 $f'(x)>0$ 得，$0<x<x_1$ 或 $x>x_2$，

由 $f'(x)<0$ 得，$x_1<x<x_2$，

所以 $f(x)$ 的增区间为（0，$\frac{1-a-\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$），（$\frac{1-a+\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$，$+\infty$），

减区间为（$\frac{1-a-\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$，$\frac{1-a+\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$）；

当 $a>1$ 时，$2a(1-a)<0$，$x_2<0<x_1$，由 $f'(x)>0$ 得，$0<x<x_1$，由 $f'(x)<0$ 得，$x>x_1$，

所以 $f(x)$ 的增区间为(0，$\frac{1-a-\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$)，减区间为（$\frac{1-a-\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$，$+\infty$），

综上所述：

当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，$f(x)$ 的增区间为（0，$\frac{1-a-\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$）、（$\frac{1-a+\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$，$+\infty$），

减区间为（$\frac{1-a-\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$，$\frac{1-a+\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$）；

当 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 的增区间为（0，$+\infty$）；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 的增区间为(0，$\frac{1-a-\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$)，减区间为（$\frac{1-a-\sqrt{3a^2-4a+1}}{2a(1-a)}$，$+\infty$）.

【简要评注】分类讨论是一种逻辑方法，是一种重要的数学思想，同时也是一种重要的解题策略，它体现了化整为零、积零为整的思想与归类整理的方法．凡涉及要分类讨论的问题，一般都具有较强的逻辑性、综合性、条理性、探索性，对解题能力的要求极高．此题是在探索函数单调性的基础之上，对参数的取值范围进行分类讨论，所以要牢牢抓住“导函数看符号，原函数看单调性”的函数单调区间的求解策略．

求解参数范围或解决一些与参数有关的题目是一类既富有思考情趣，又融众多知识和技巧于一体且综合性强、灵活性高、难度颇大的挑战性问题，许多学生面对这些题目往往感到心中无数，甚至有些不知所措，有的学生还由此产生恐惧情绪，造成解题的心理障碍。笔者从教学实践中感到，要克服学生的心理障碍，必须着力向学生讲清楚解决此类问题的基本的思考途径，而借助于 TI 图形计算器进行辅助教学，就可以实现这个目标，让问题化繁为简，化难为易，让学生在真实、具体的操作情境中丰富感知，在身临其境中得到启发，激活思维，体验学习的成功，提高学习数学的兴趣，大大提高课堂教学的有效性。

参考文献：

[1]左传波．动态解析高考数学综合题[M]． 上海：华东师范大学出版社，2009

[2]肖凌戆．高中数学“优效教学”的研究与思考[J]． 中国数学教育（高中版），2009（3）：12-14