现代教育技术与数学教育整合的一次有益尝试

上海市进才中学　　卢　　明

众所周知，数学需要计算，也离不开计算，培养学生“过硬”的计算能力一直是中学数学教学的重要任务之一。然而，上海市（首届）TI 杯高二数学竞赛允许学生使用各种型号的计算器，学生的计算能力似乎不必“过硬”了，而怎样借助各种计算器的帮助，找到数学问题的解决方法成为这次竞赛中考察的重点之一。由此可见，随着社会的发展，数学学科对学生的培养目标正在发生着深刻变化，这是 TI 杯数学竞赛向我们传递的一个信息。

现代信息技术日益普及，使我们的工作、生活和学习环境发生了许多变化，数学教学必须顺应时代的发展，把现代技术与数学教学有机地整合在一起，让学生在计算机（器）的帮助下，更好地学习数学，学习更有用的数学，让教师在计算机（器）的帮助下，更有效地改善自己的教学，这是这次竞赛向我们传递的另一个信息。

在考试使用计算器是技术与教学的整合一个重要方面，把对学生数学能力的考察与学生使用计算器的能力的考察相结合，是这次数学竞赛所做的非常有益的探索，本文旨在对这些探索做一些粗浅的分析。

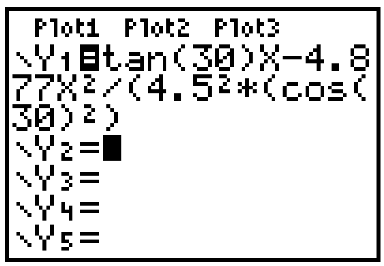
一、通过计算器的使用拓宽数学与联系实际的宽度

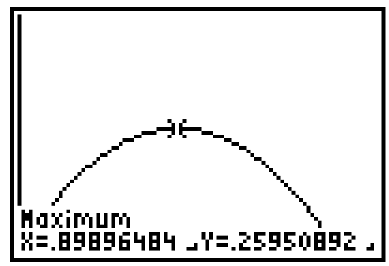
用数学知识去解决实际问题，可以体现数学的价值。实际问题中产生的数据往往是杂乱的，对数学模型的处理需要功能强大的运算工具。计算器的使用可以使学生直接去解决一些“真实”的问题，学习更有用的数学。

例 1（个人赛第 3 题）通常利用方程 $y = x \cdot tg\theta - \dfrac{4.877x^2}{v^2\cos^2\theta}$ $(y \ge 0)$ 的抛物线部分表示人或动物跳跃时的轨迹，其中 θ 表示在起跳点 O 的起跳角度（$0° < \theta < 90°$），v 为起跳的初始速度（单位：米/秒），x、y 的单位为米。现有一只青蛙，起跳

角 $\theta=30°$ ， 起 跳 初 速 度 $v=4.5$ 米 / 秒 ， 则 这 只 青 蛙 最 高 能 跳 米（精确到0.01米）。

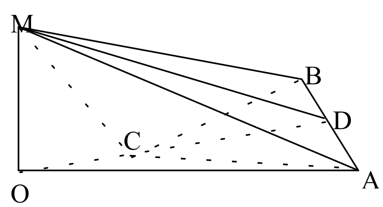
在这个问题中的数学模型 $y=x\cdot tg\theta-\dfrac{4.877x^2}{v^2\cos^2\theta}$ $(y\geq 0)$ 包含着非常复杂的运算，运用图形计算器，可以先将$\boxed{\text{MODE}}$中的角度单位设置为 Degree，然后直接输入函数 $y_1=tg30°x-\dfrac{4.877x^2}{4.5^2\cdot\cos^2 30°}$，即可求出函数最大值：当 $x=0.89896484$ 时，$y_{\max}=0.26$，即这只青蛙最高能跳0.26米。



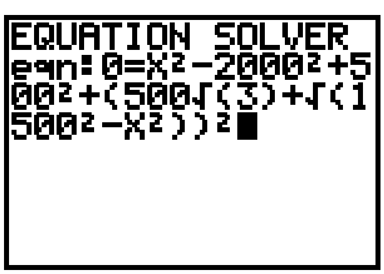


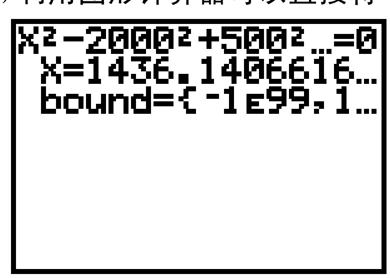
例 2（个人赛第 6 题）海拔高度都是 100 米的三个雷达站 A 、B 、C 正好位于边长为 1000 米的正三角形的三个顶点上，在某一时刻发现一个目标 M ，三个雷达站同时测得三个距离 $MA=2000$ 米，$MB=2000$ 米 ，$MC=1500$ 米，此时这个目标位于海拔高度

_______米的上空（精确到 1 米）。



作 $MO\perp$ 平面 ABC ，设 $MO=x$ ，由已知条件不难得到 $500^2+(500\sqrt{3}+\sqrt{1500^2-x^2})^2=2000^2-x^2$ ，对这个方程进行化简和求解同样也需要大量的运算，利用图形计算器可以直接将





此方程输入方程求解器[Solver]中，让机器完成求解过程，得到 $x=1436$ ，即这个目标位于海拔高度1536米的上空。

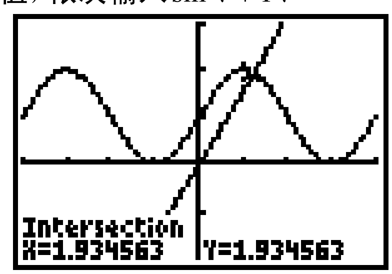
二、 通过不同的技术手段考察学生不同层次的数学能力

这次数学竞赛允许学生使用各种型号的计算器或不使用计算器。因此，学生在解决问题时首先要选择用常规方法，还是用科学计算器或图形计算器，不同的选择对学生数学能力的考察也不完全相同。

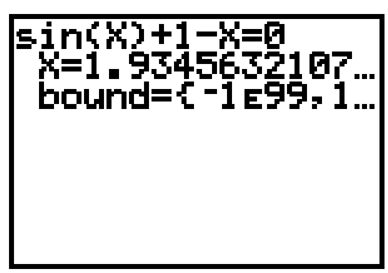
例 3（个人赛第 8 题）．通过函数 $y=\sin x+1$ 和 $y=x$ 的图象交点可知方程 $x=\sin x+1$ 在 $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 内有一个解。为了求出方程 $x=\sin x+1$ 精确到 10^{-5} 的近似解，可以采用下述的“迭代”方法进行：设 $x_n=\sin x_{n-1}+1\ (n=1,2,3,\cdots)$，取初始值 $x_0=2$，得 $x_1=\sin 2+1=1.909297427$，$x_2=\sin 1.909297427+1=1.94325347$，……，直到 $|x_n-x_{n-1}|<10^{-6}$ 时，我们就把 $x=x_n$ 作为方程得近似解，则上述方程精确到 10^{-5} 的近似解是__________________。

常规方法：方程 $x=\sin x+1$ 是非常规的三角方程，无法用公式求出精确解，即使画出对应函数的图象，只能大致判断出解的范围，无法求出精确到 10^{-5} 的近似解。

科学计算器：将角度单位设置为 RAD，输入 2 作为 x_0 的值，依次输入 $\sin$ 、$+1$、$=$，得到 x_1 的值为 $1.909297427\cdots$，重复上述过程，可得到 x_2、x_3、……，直至小数点后的第六位为一个确定的值数 3，方程精确到 10^{-5} 的近似解是 $x=1.93456$ 。



图形计算器：两个函数 $y=\sin x+1$ 和 $y=x$ 图象交点的横坐标即为方程的解. 将 $\boxed{\text{MODE}}$ 中 Float 设置为 6，画出两函数的图象，用计算器直接求出交点坐标为 $(1.934563, 1.934563)$，方程精确到 10^{-5} 的近似解是 $x=1.93456$ 。



直接将方程输入计算器的方程求解器 Solver 中，立即可以求出足以满足精确度要求的方程的解。

“迭代”是没有学过的新的数学知识，阅读理解题目

中的所述的“迭代”方法是解决这个题目的前提。将“迭代”方法转化为相应的计算器重复操作，将精确度的控制$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-6}$转化为迭代过程中小数点后的第六位为一个确定的数值，这是对学生数学能力和运用科学计算器能力的综合考察。数形结合是一个重要的数学思想方法，图形计算器的作图功能使学生很方便地实现数形转化，改变[MODE]的设置，利用计算器的强大计算功能，可以迅速求出两个函数图象符合题目精确度要求的交点坐标。

例 4.（团体赛第 1 题）

已知$\sin 6° + \sin 12° + \sin 18° + \cdots + \sin(6k) + \cdots \sin 174° = tgm°$，其中$0 < m < 90$，求$m$的值。

常规解法：

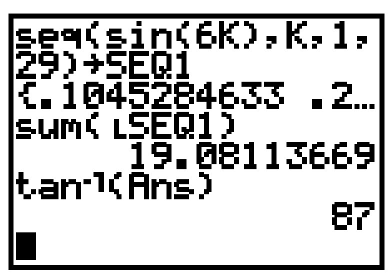
$$原式 = \frac{1}{\sin 6°}(\sin^2 6° + \sin 6° \sin 12° + \sin 6° \sin 18° + \cdots + \sin 6° \sin 174°)$$
$$= \frac{1}{\sin 6°}(\frac{1 - \cos 12°}{2} + \frac{\cos 6° - \cos 18°}{2} + \frac{\cos 12° - \cos 24°}{2} + \cdots + \frac{\cos 168° - \cos 180°}{2})$$
$$= \frac{1}{2\sin 6°}(1 + \cos 6° - \cos 174° - \cos 180°)$$
$$= \frac{1}{\sin 6°}(1 - \cos 174°) = \frac{1 - \cos 174°}{\sin 174°} = tg87°，\therefore m = 87$$

科学计算器：原式$= \sin 90° + 2(\sin 6° + \sin 12° + \sin 18° + \cdots + \sin 84°)$

用计算器逐一求出上式中的每一个值，可得$tgm° = 19.08113669$，从而求出

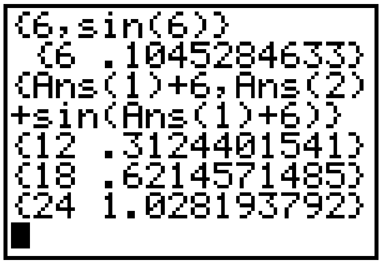
$m = arctg(19.08113669) = 87°$

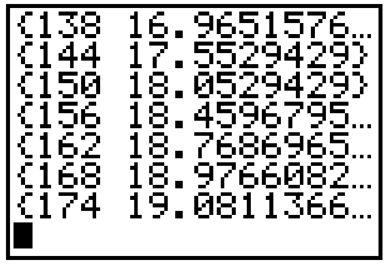
图形计算器：

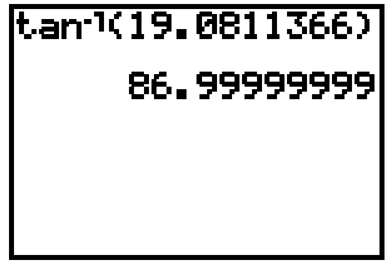


方法一：定义一个数组 SEQ1，用求和命令[SUM]数组中所有元素之和为$19.08113669\cdots$，再求出这个值的反正切值为$87°$。

方法二：在主屏幕上输入{6,sin(6)}，按下[ENTER]，再输入{Ans(1)+6,Ans(2)+sin(Ans(1)+6)}，并连续按下[ENTER]，直至出现{174,19.0811366}，由此可知，$tgm° = 19.0811366$，输入$\tan^{-1}(19.0811366)$得$m = 86.9999999° \approx 87°$







通过三角恒等变形解决三角式的求值问题是一种常用的方法，它过程烦琐，要求学生有很强的运算技巧。有了计算器之后，这种要求似乎变的没有必要，学生可以用计算器直接计算求出结果。计算难度的降低并不意味数学能力降低，借助图形计算器学生有机会进行多种尝试：构造数组、迭代累加或编制程序等，学生的数学能力得到更加全面的检验。

三、通过探究性问题引导学生主动把计算器引入到探究活动之中

学生的探究活动经常被烦琐的计算所制约，计算器的强大计算功能和图象显示等功能，帮助学生摆脱了计算的束缚，并为学生提供数字、图形、公式的探究方法，探究活动变得迅速、直观。

例 5（团体赛第 2 题）已知 x、y 均为正整数，且 $35x+27y\le 1000$，求 xy 的最大值。

常规方法：∵ x、y 均为正整数，$1000\ge 35x+27y\ge 2\sqrt{35x\cdot 27y}$，

∴ $xy\le \dfrac{500^2}{35\cdot 27}\approx 264.55$，当且仅当 $x=\dfrac{500}{35}\approx 14.29$，$y=\dfrac{500}{27}\approx 18.52$ 时等号成立，

（此时 $x:y=35:27$），当 x、y 均为正整数时，xy 也为正整数，且 $xy\le 264$。

若 $xy=264=2^3\times 3\times 11$，最接近 $x:y=35:27$ 的值为 $x=12$，$y=22$，这时 $35x+27y=1014>1000$；

若 $xy = 263$（素数），只能 $x = 1$， $y = 263$，此时 $35x + 27y = 7136 > 1000$；

若 $xy = 262 = 2\times131$，取 $x = 2$， $y = 131$，这时 $35x + 27y = 3607 > 1000$；

若 $xy = 261 = 3^2\times29$，取 $x = 9$， $y = 29$，这时 $35x + 27y = 1098 > 1000$；

若 $xy = 260 = 2^2\times5\times13$，取 $x = 13$， $y = 20$，这时 $35x + 27y = 995 < 1000$；

∴ $(xy)_{\max} = 260$。

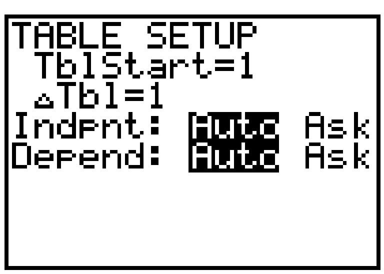
科学计算器：同上可得， $x \approx 14.29$， $y \approx 18.52$ 时， $(xy)_{\max} \approx 264.55$，

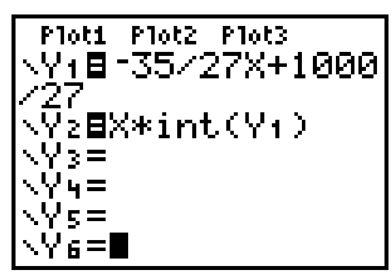
∵ x、y 均为正整数，∴可以先当 x 取 14 附近的值时，满足不等式 $35x + 27y \le 1000$ 的 y 的最大值，从而进一步求出 xy 的最大值。利用计算器的计算功能不难得到下表：

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$y_{\max}$	24	22	21	20	18	17	16	15	13
xy	240	242	252	260	252	255	256	255	234

由此可得， $(xy)_{\max} = 260$

图形计算器：输入函数 $y_1 = -\frac{35}{27}x + \frac{1000}{27}$，由题意知， x、 y 应取第一象限内直线 $y_1 = -\frac{35}{27}x + \frac{1000}{27}$ 下方的整点，构造 $y_2 = x\cdot\operatorname{int}(y_1)$，易知，欲使 xy 最大，即使 y_2 最大。设置 Tblset 如下，显示 Table 窗口，发现当 $x = 13$, $y = 20$ 时，$y_{2\max} = 260$，即当 $x = 13$, $y = 20$ 时， $(xy)_{\max} = 260$。





X	Y_1	Y_2
1	35.741	35
2	34.444	68
3	33.148	99
4	31.852	124
5	30.556	150
6	29.259	174
7	27.963	189

X=1

X	Y_1	Y_2
8	26.667	208
9	25.37	225
10	24.074	240
11	22.778	242
12	21.481	252
13	20.185	260
14	18.889	252

X=14

X	Y_1	Y_2
15	17.593	255
16	16.296	256
17	15	255
18	13.704	234
19	12.407	228
20	11.111	220
21	9.8148	189

X=21

与常规方法相比，借助于计算器的探究方法，充分发挥了计算器的计算优势，思维简捷，方法新颖。这说明，在图形计算器提供数字、图形、公式的探究环境中，学生可以将同一个问题转换为不同的表达形式，从而找到解决问题的最佳途径。

计算器进入高考和竞赛考场，是数学教育改革的创举，它有力地推动着数学教学与现代技术的结合，给数学教学带来了新的活力，给数学问题的解决提供了新的方法。与此同时，也出现了一些新的问题，如：随着计算工具的升级，学生对计算器的功能的利用越来越多，解决问题的能力也越来越强，但解题的过程越来越简单，对解题过程中涉及到的较低级运算的关心越来越少（例 3），这是否有利于学生的长远发展？计算器的引入使教材中的一些内容成为多余（例 4），解方程也可以由计算器完成（例 2），现行教材应该怎样适应变化？在应用计算器解题的过程中，一些新的概念和方法陆续出现，如“迭代”、“数组”、“编程”等（例 3，例 4），我们应该怎样对待这些“新生事物”？这些问题的出现正是在教育技术与数学教学的整合中出现的，它一定会在教育技术与数学教学的进一步整合中得到圆满解决。